# ÜBER GEWISSE FLÄCHEN KONSTANTER KRÜMMUNG IN RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

ANNELIESE HÜNKE GEB. SCHNEIDER
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 19. JULI 1939
TAG DER PROMOTION: 8. JANUAR 1940

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 97

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band 4

## Einleitung.

Das Bestreben der ganzen Arbeit geht dahin, in Räumen konstanter Krümmung Flächen konstanter Krümmung zu bestimmen und zu untersuchen. Es werden alle drei Geometrien, die elliptische, die euklidische und die hyperbolische, gemeinsam behandelt. Der erste Teil enthält die Untersuchung der Flächen, die die Krümmung des umgebenden Raumes haben, der zweite Teil die Bestimmung der Rotationsflächen konstanter Krümmung in Räumen konstanter Krümmung, der dritte Teil allgemeinere Untersuchungen.

Zur Einführung in die drei Teile ist zu sagen:

### Erster Teil.

In der euklidischen Geometrie haben nur die Torsen die GAUSSsche Krümmung Null. Untersucht man nun die Torsen in Räumen konstanter Krümmung, so zeigt sich, daß für alle drei Geometrien der Satz gilt: Die Torsen und nur diese Flächen haben stets die Krümmung des umgebenden Raumes. Dann werden Sätze über Torsen, die aus der euklidischen Geometrie bekannt sind, übertragen und für alle drei Geometrien bewiesen. Die Beweise sind sehr einfach und kurz und benutzen nur die Lehre von Pol und Polare. Man braucht diese Sätze teilweise zur Diskussion der Abwicklung der Kegel auf die nichteuklidische Ebene im Zusammenhang mit den Raumformen, die den Schluß des ersten Teiles bildet.

### Zweiter Teil.

Die Bestimmung von Flächen konstanter Krümmung gelingt in der euklidischen Geometrie ohne Schwierigkeiten für Rotationsflächen. Daher wurde diese Aufgabe auch für die hyperbolische und die elliptische Geometrie gewählt.

Betrachtet man das projektive Modell der nichteuklidischen Geometrien und nimmt homogene Koordinaten, so ist das absolute Gebilde der hyperbolischen Geometrie die Kugel vom Radius Eins und das absolute Gebilde der elliptischen Geometrie die nullteilige Fläche $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Wählt man alle Flächen, die durch Rotation einer ebenen Kurve $X = f(v)$, $Z = g(v)$ um die $Z$-Achse entstehen, so sind diese Flächen für alle drei Geometrien Rotationsflächen. Die

Kurven $X^2 + Y^2 = r^2$ sind nämlich für alle drei Geometrien Kreise, weil die Rotation um die $Z$-Achse zu jeder der Bewegungsgruppen der Geometrien gehört. Die Gleichung der Rotationsflächen lautet in rechtwinkligen Koordinaten

$$X = f(v)\cos u,\quad Y = f(v)\sin u,\quad Z = g(v),$$

wo $f(v)$ und $g(v)$ willkürliche Funktionen sind. Führt man homogene Koordinaten

$$\frac{x_1}{x_0} = X,\quad \frac{x_2}{x_0} = Y,\quad \frac{x_3}{x_0} = Z$$

ein und setzt für die hyperbolische Geometrie $x_0 = \frac{1}{\varkappa}\,x_0$ und normiert die homogenen Koordinaten $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \varkappa^2$, so erhält man für $\varkappa^2 = -1$ eine hyperbolische, für $\frac{1}{\varkappa^2} = 0$ die euklidische und für $\varkappa^2 = 1$ eine elliptische Geometrie.

Die Bestimmung der Rotationsflächen konstanter Krümmung führt man wie in der euklidischen Geometrie, indem man nun die entsprechenden Schritte in der nichteuklidischen Differentialgeometrie macht. Dazu muß noch gesagt werden, daß bei der oben genannten Parameterdarstellung der Rotationsflächen die Parameterlinien für alle drei Geometrien Krümmungslinien sind; denn die Flächennormalen längs der Krümmungslinien bilden Torsen. (Der Pol der Tangentialebene des Punktes $\mathfrak{x}$ liegt stets in der von der $Z$-Achse und dem Punkte $\mathfrak{x}$ bestimmten Ebene, und die Flächennormalen bilden längs $u = \text{const}$ Ebenen und längs $v = \text{const}$ Kegel.) Also stehen die Parameterlinien aufeinander senkrecht. Das ist wichtig, da sonst noch Parametertransformationen nötig geworden wären, weil $F = 0$ für die weitere Untersuchung vorausgesetzt werden muß. Man wählt nämlich das Bogenelement der gesuchten Flächen in der Form $ds^2 = E(u, v)\,du^2 + dv^2$ und bestimmt $E$ für konstante GAUSSsche Krümmung $\mathfrak{K}$. Dann berechnet man die Fundamentalgrößen $E$ und $G$ als Funktionen von $f(v)$ und $g(v)$. Die Forderung $G = 1$, d. h. daß der Parameter $v$ Bogenlänge auf den Parameterlinien $u = \text{const}$ sein soll, und die schon bestimmte Funktion $E$ bestimmen ein System von zwei Differentialgleichungen für $f(v)$ und $g(v)$. Die Lösung gelingt durch Einführung einer Hilfsfunktion und führt auf Quadraturen. Die Quadraturen lassen sich nur für Spezialfälle elementar ausführen, da im allgemeinen elliptische Integrale vorliegen.

Bei geeigneter Übertragung gilt, wie weiter gezeigt wird, folgender Satz von BELTRAMI: Erteilt man in der euklidischen Geometrie einer Rotationsfläche konstanter Krümmung $\mathfrak{K}$ alle Translationen längs der $Z$-Achse, dann hat jede Rotationsfläche, die sämtliche Flächen der so

definierten Schar senkrecht schneidet, die konstante Krümmung $-\mathfrak{K}$. In der elliptischen und hyperbolischen Geometrie muß man jedoch an Stelle der Translationen Bewegungen wählen, die die $Z$-Achse in sich überführen.

Jeder Fläche ist eine Polfläche, der Ort ihrer Flächennormalenpunkte, zugeordnet. Untersucht man die Polflächen der Rotationsflächen konstanter Krümmung, so kann man folgenden Satz beweisen: Die Polflächen der Rotationsflächen konstanter Krümmung sind ebenfalls Rotationsflächen konstanter Krümmung, und zwar ist ihre totale relative Krümmung dem reziproken Wert der totalen relativen der Ausgangsflächen gleich, also

$$\mathfrak{K}^*_{t.r.} = \frac{1}{\varkappa^4 \mathfrak{K}_{t.r.}}.$$

Dieser Satz wird zunächst bewiesen.

Daran schließt sich die Diskussion der Rotationsflächen konstanter Krümmung, bei denen sich die vorkommenden Quadraturen elementar ausführen lassen. Eine Anwendung des früher übertragenen Beltramischen Satzes ergibt sich bei der Betrachtung der Bilder von Rotationsflächen konstanter Krümmung im (Poincaréschen) Halbraum.

## Dritter Teil.

Die Ableitungen des dritten Teils dienen im wesentlichen dazu, die Übertragung des Hilbertschen Satzes über die Unmöglichkeit einer singularitätenfreien Fläche konstanter negativer Gaussscher Krümmung im euklidischen Raum auf die nichteuklidischen Geometrien zu zeigen. Dieser Satz läßt sich auf folgende Weise auf die nichteuklidischen Geometrien ausdehnen: Es gibt in allen drei Geometrien keine singularitätenfreie Fläche negativ konstanter relativer Krümmung $\mathfrak{K}_r = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2}$ mit einer Ausnahme $\frac{1}{\varkappa^2} = 1$ und $\mathfrak{K} = 0$. Der Beweis wird so geführt, daß man die Bilder der Flächen mit Hilfe der euklidischen Differentialgeometrie in den in der Einleitung zum zweiten Teil angegebenen Modellen untersucht und zeigt, daß die Bilder der Asymptotenlinien die euklidischen Asymptotenlinien der Bilder sind. Dann kann man den Hilbertschen Beweis mit kleinen Änderungen übertragen. Aus dem Satz über die Asymptotenlinien lassen sich noch einfache Zusammenhänge zwischen den zweiten Fundamentalgrößen und der Gaussschen Krümmung der nichteuklidischen Geometrien und der euklidischen Geometrie folgern. Daraus ergeben sich weitere Aussagen über die Torsen und die schon untersuchten Rotationsflächen konstanter Krümmung.

# Erster Teil.

## Torsen.

### § 1. Regelflächengleichung und Torsenbedingung.

Eine Raumkurve sei gegeben durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, wo $s$ die Bogenlänge auf derselben, also $(\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}}) = 1$ sei. Wählt man eine Funktion $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(s)$ so, daß $(\mathfrak{w}\mathfrak{w}) = 1$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{w}) = 0$ ist — die Funktion $\mathfrak{w}(s)$ läßt sich dabei ohne Einschränkung für jeden Punkt $\mathfrak{x}(s)$, der real ist, definieren —, so lautet die Gleichung einer Regelfläche

$$\mathfrak{z} = \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{w}.$$

Aus der Normierungsbedingung $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = \varkappa^2$ ergibt sich

$$\varkappa^2 = \lambda^2\varkappa^2 + \mu^2, \quad \mu = \varkappa\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Setzt man nun $\lambda = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}$, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{z}(s,\varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \varkappa\sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{w}(s). \tag{1}$$

Die Parameterlinien $s = \text{const}$ sind Geraden. Bei der Darstellung (1) ergibt sich für $\frac{1}{\varkappa^2} = 0$, also für die euklidische Geometrie, sofort die bekannte Regelflächengleichung, wenn man $\mathfrak{z}:\{z_1, z_2, z_3, z_0\}$ als homogene Koordinaten deutet und $x_0(s) = 1$ und $w_0(s) = 0$ wählt:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varphi\mathfrak{w}.$$

Für die hyperbolische Geometrie, also für $\varkappa^2 = -1$, gehen die trigonometrischen Funktionen in (1) in die Hyperbelfunktionen über.

Eine Regelfläche ist bekanntlich eine Torse, wenn die Tangentenebene längs der Erzeugenden fest bleibt. Um nun eine analytische Bedingung für die Regelflächengleichung zu finden, die eine Torse gibt, stellt man die Gleichung der Tangentenebene der Regelfläche auf und fordert für die Erzeugenden $s = \text{sonst}$ ihre Unabhängigkeit von $\varphi$. Die Gleichung der Tangentenebene mit den Koordinaten $\mathfrak{y}:(y_1, y_2, y_3, y_0)$ lautet

$$\left|\begin{matrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{z} & \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s} & \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\varphi} \end{matrix}\right| = 0.$$

Berechnet man diese Determinante für die Regelflächengleichung (1) und vereinfacht sie, so erhält man

$$\left|\begin{matrix} \mathfrak{y} & \mathfrak{x} & \mathfrak{w} & \dot{\mathfrak{x}} + \varkappa\operatorname{tg}\frac{\varphi}{\varkappa}\,\dot{\mathfrak{w}} \end{matrix}\right| = 0.$$

Diese Ebene soll für $s = \text{const}$ unabhängig von $\varphi$ sein. Daraus folgt als notwendige und hinreichende Torsenbedingung

$$|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{w}\,\dot{\mathfrak{w}}\,| = 0. \tag{2}$$

Zu beachten ist, daß die Bedingung (2) auch gilt, wenn der Parameter $s$ nicht Bogenlänge von $\mathfrak{x}(s)$ ist; denn bei der Ableitung von (2) wurde davon kein Gebrauch gemacht. Wichtig sind dafür nur die Voraussetzungen $(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \varkappa^2$, $(\mathfrak{w}\mathfrak{w}) = 1$ oder $\varkappa^2$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{w}) = 0$.

## § 2. Aufstellung aller Torsen und ihre Gaußsche Krümmung.

Betrachtet man als Modell der drei Geometrien das projektive Modell, so unterscheiden sich die elliptische, die euklidische und die hyperbolische Geometrie nur dadurch, daß ihre Bewegungsgruppen drei verschiedene Untergruppen der projektiven Gruppe sind, die für jede Geometrie eine bestimmte Fläche zweiter Ordnung invariant lassen. Die Eigenschaft einer Fläche, längs einer Geraden eine feste Tangentenebene zu besitzen, ist daher unabhängig von der Maßbestimmung des Raumes. Die Torsen der nichteuklidischen Geometrien sind also die der euklidischen Geometrie: Ebenen, Kegel und die Tangentenflächen der Raumkurven oder die aus solchen Stücken zusammengesetzten Flächen. Man hat jetzt nur die Gleichungen dieser Flächen als Spezialfälle der Gleichung (1) zu schreiben, so daß die Bedingung (2) erfüllt ist, d. h. es ist die Funktion $\mathfrak{w}(s)$ für die einzelnen Fälle zu bestimmen.

Für die Tangentenfläche muß $\mathfrak{w} = \dot{\mathfrak{x}}(s)$ sein, also lautet die Gleichung, für die die Bedingung (2) erfüllt ist,

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \varkappa \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\dot{\mathfrak{x}}(s). \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{x}(s)$ eine ebene Kurve, so erhält man die Ebene in (3).

Für die Kegel ist $\dot{\mathfrak{w}} = 0$, also $\mathfrak{w} = \text{const}$. Aus $(\mathfrak{x}\mathfrak{w}) = 0$ folgt, daß die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ in der Polarebene von $\mathfrak{w} = \text{const}$ liegt, also eben ist. Die Spitze des Kegels ist $\mathfrak{w} = \text{const}$; denn für $\frac{\varphi}{\varkappa} = \frac{\pi}{2}$ folgt, daß alle Erzeugenden durch $\mathfrak{w} = \text{const}$ gehen. Die Kegelgleichung lautet

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \varkappa \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{w}. \tag{4}$$

In der hyperbolischen Geometrie muß man drei Kegelarten unterscheiden, je nachdem die Spitze des Kegels im Innern, im Äußern oder auf dem absoluten Gebilde liegt. Die Gleichung (4) gilt nur in den beiden ersten Fällen, da ja $(\mathfrak{w}\mathfrak{w}) = 1$ und nicht $(\mathfrak{w}\mathfrak{w}) = 0$ in dieser Darstellung vorausgesetzt wird. Liegt die Spitze des Kegels auf dem absoluten Gebilde, so setzt man die Gleichung des Kegels in der Gestalt

$$\mathfrak{z} = \lambda\,\mathfrak{x}(s) + \mu\,\mathfrak{w}$$

an und fordert $\mathfrak{w} = \text{const}$, $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}) = 0$ und $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}) = \varkappa^2$. Berechnet man aus diesen Bedingungen $\mu$, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{z}(s, \lambda) = \lambda\,\mathfrak{x}(s) + \frac{\varkappa^2(1-\lambda^2)}{2\lambda(\mathfrak{x}\,\mathfrak{w})}\,\mathfrak{w}. \tag{5}$$

Um die Gleichung und die partiellen Ableitungen zu vereinfachen, kann man noch $\mathfrak{x}(s)$ so wählen, daß $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{w}) = \text{const}$ ist, d. h. man wählt zur Kurve $\mathfrak{x}(s)$ das Schnittgebilde des Kegels mit einer Grenzkugel, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist. Die Torsenbedingung (2) ist auch für (5) erfüllt.

Für die elliptische Geometrie gilt stets die Kegelgleichung (4); denn die Spitze des Kegels ist immer ein realer Punkt.

Satz 1: *Die Torsen haben die Krümmung des Raumes.*

Beweis: Für die totale relative Krümmung $K_{\text{t. r.}}$ gilt

$$K_{\text{t. r.}} = \frac{D\,D'' - D'^2}{\varkappa^2\,(E\,G - F^2)},$$

wo $$D = \left(\mathfrak{y}\,\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial s^2}\right), \quad D' = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial s}\right), \quad D'' = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial\varphi}\right)$$

bedeutet. Dabei ist $\mathfrak{y}$ der Pol der Tangentenebene der Fläche in bezug auf die absolute Fläche. Da nun die Tangentenebene der Torsen unabhängig von $\varphi$ ist, so muß dies auch ihr Pol sein, es ist also $\frac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\varphi} = 0$. Das zieht $D' = 0$ und $D'' = 0$ nach sich. Für die totale relative Krümmung folgt $K_{\text{t. r.}} = 0$, und die Gausssche Krümmung wird $\mathfrak{K} = K_{\text{t. r.}} + \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Für $\frac{1}{\varkappa^2} = 0$ erhält man das bekannte Resultat der euklidischen Geometrie.

### § 3. Übertragung der Formel von O. Rodrigues.

Daß alle Flächen, deren totale relative Krümmung verschwindet, Torsen sind, folgt leicht aus der Formel von O. RODRIGUES, die auch für die nichteuklidischen Geometrien gilt, wie folgender Satz zeigt.

Satz 2: *Ist eine Kurve Krümmungslinie einer Fläche, so gilt die Formel von O. RODRIGUES:*

$$\dot{\mathfrak{y}} + \lambda\,\dot{\mathfrak{x}} = 0,$$

*und die Flächennormalen längs der Krümmungslinie bilden eine Torse.*

Beweis: Betrachtet man eine Krümmungslinie auf der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ mit dem Parameter $s$ (dieser sei Bogenlänge auf der Krüm-

mungslinie), so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinie gegeben durch

$$\begin{vmatrix} D\dot{u} + D'\dot{v} & E\dot{u} + F\dot{v} \\ D'\dot{u} + D''\dot{v} & F\dot{u} + G\dot{v} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Aus (6) folgt

$$D\dot{u} + D'\dot{v} = \lambda(s)\,(E\dot{u} + F\dot{v}), \tag{6'}$$

$$D'\dot{u} + D''\dot{v} = \lambda(s)\,(F\dot{u} + G\dot{v}). \tag{6''}$$

Führt man nun für

$$E = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\right), \quad F = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\right)$$

die Größen

$$D = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\right), \quad D' = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\right), \quad D'' = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\,\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right)$$

ein, dann gehen (6') und (6'') über in

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\quad \dot{\mathfrak{y}} + \lambda\dot{\mathfrak{x}}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\quad \dot{\mathfrak{y}} + \lambda\dot{\mathfrak{x}}\right) = 0.$$

Aus $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \varkappa^2$, $(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = \varkappa^2$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$ folgt weiter $(\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}}) = 0$, $(\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{y}}) = 0$, $(\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}}) = 0$. Da nun $\mathfrak{y}$ der Pol der Tangentenebene im Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ ist und $\dot{\mathfrak{x}}$ in dieser Ebene liegt, ist $(\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{x}}) = 0$ und damit auch $(\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}}) = 0$. Daraus leitet sich $(\mathfrak{x}\quad \dot{\mathfrak{y}} + \lambda\dot{\mathfrak{x}}) = 0$ und $(\mathfrak{y}\quad \dot{\mathfrak{y}} + \lambda\mathfrak{x}) = 0$ ab. Nun läßt sich im Raum jeder Punkt linear abhängig von vier linear unabhängigen Punkten darstellen. Als Grundpunkte kann man z. B. die vier linear unabhängigen Punkte $\mathfrak{x}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}$, $\mathfrak{y}$ wählen. Diese vier Punkte sind Funktionen von $s$, daher müßte es vier Funktionen $\lambda_\nu = \lambda_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ geben, so daß

$$\dot{\mathfrak{y}} + \lambda\dot{\mathfrak{x}} = \lambda_1\mathfrak{x} + \lambda_2\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} + \lambda_3\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} + \lambda_4\mathfrak{y}$$

gilt. Um $\lambda_\nu = \lambda_\nu(s)$ zu bestimmen, multipliziert man innen der Reihe nach mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1\varkappa^2, \quad \text{also} \quad \lambda_1 \equiv 0, \\ 0 &= \lambda_4\varkappa^2, \quad \text{also} \quad \lambda_4 \equiv 0, \\ 0 &= \lambda_2 E + \lambda_3 F, \\ 0 &= \lambda_2 F + \lambda_3 G. \end{aligned}$$

Da die Koeffizientendeterminante der beiden letzten Gleichungen $EG - F^2 > 0$ ist, so wird auch $\lambda_2 \equiv 0$ und $\lambda_3 \equiv 0$. Damit ist die Formel

$$\dot{\mathfrak{y}} + \lambda\dot{\mathfrak{x}} = 0 \tag{7}$$

bewiesen. Betrachtet man nun die Regelfläche, die von den Flächennormalen längs der Krümmungslinie gebildet wird, ihre Gleichung ist

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{y}(s),$$

so folgt aus (7), daß diese Fläche eine Torse ist; denn es ist

$$|\,\mathfrak{x}\;\dot{\mathfrak{x}}\;\mathfrak{y}\;\dot{\mathfrak{y}}\,| = 0.$$

Als Umkehrung gilt

Satz 3: *Bilden die Flächennormalen längs einer Kurve auf der Fläche eine Torse, so gilt die Formel* (7) *von O.* RODRIGUES, *und die Kurve ist Krümmungslinie der Fläche.*

Beweis: Lautet die Parameterdarstellung der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$ der Pol der Tangentenfläche im Flächenpunkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und betrachtet man diejenigen Kurven auf der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u(s), v(s))$, deren Flächennormalen eine Torse bilden, so ist die Gleichung der Torse $\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{y}$, und die Torsenbedingung muß erfüllt sein. Aus der Bedingung folgt, daß vier Funktionen $\lambda_\nu = \lambda_\nu(s)$ existieren, so daß $\lambda_1\mathfrak{x} + \lambda_2\dot{\mathfrak{x}} + \lambda_3\mathfrak{y} + \lambda_4\dot{\mathfrak{y}} = 0$ gilt. Multipliziert man diesen Ausdruck innen mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so folgt $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$, wenn man benützt, daß $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}}) = 0$ ist. Damit ist (7) wieder bewiesen. Multipliziert man (7) innen mit $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u}$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v}$, so erhält man

$$\left(\dot{\mathfrak{y}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u}\right) + \lambda\left(\dot{\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial u}\right) = 0, \quad \left(\dot{\mathfrak{y}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v}\right) + \lambda\left(\dot{\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial v}\right) = 0$$

oder nach Einführung der Fundamentalgrößen

$$\begin{aligned} D\dot{u} + D'\dot{v} &= \lambda(E\dot{u} + F\dot{v}), \\ D'\dot{u} + D''\dot{v} &= \lambda(F\dot{u} + G\dot{v}). \end{aligned} \tag{8}$$

Schreibt man (8) als Determinante, so hat man die Differentialgleichung der Krümmungslinie gewonnen:

$$\begin{vmatrix} D\dot{u} + D'\dot{v} & E\dot{u} + F\dot{v} \\ D'\dot{u} + D''\dot{v} & F\dot{u} + G\dot{v} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Faßt man (8) als lineares Gleichungssystem für $\dot{u}$ und $\dot{v}$ auf, so muß, damit für $\dot{u}$ und $\dot{v}$ von Null verschiedene Lösungen existieren, das Verschwinden der Determinante gefordert werden:

$$\begin{vmatrix} D - \lambda E & D' - \lambda F \\ D' - \lambda F & D'' - \lambda G \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Für die Wurzeln $\lambda_1$, $\lambda_2$ der quadratischen Gleichung (10) gilt dann

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{E D'' + G D - 2 F D'}{E G - F^2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2}. \tag{11}$$

Damit ist gezeigt, daß der Faktor $\lambda$ in (7) stets eine der Hauptkrümmungen ist.

Sehr leicht läßt sich aus (7) beweisen, daß die Krümmungslinien aufeinander senkrecht stehen, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist. Führt man nämlich dann die Krümmungslinien als Parameterlinien ein, so gilt längs jeder Krümmungslinie nach (7)

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v} + \lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} = 0 \quad \text{für } u = \text{const}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} = 0 \quad \text{für } v = \text{const}.$$

Multipliziert man die erste Beziehung innen mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$, die zweite innen mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}$, so erhält man $D' = \lambda_1 F = \lambda_2 F$; daraus folgt $D' = F = 0$.

## § 4. Bestimmung aller Flächen mit $\mathfrak{K} = \frac{1}{\varkappa^2}$.

Ist die Gausssche Krümmung einer Fläche $\mathfrak{K} = \frac{1}{\varkappa^2}$, so ist ihre totale relative Krümmung $K_{\text{t. r.}} = 0$. Man kann also die zu Beginn von § 3 ausgesprochene Behauptung auch so formulieren:

Satz 4: *Alle Flächen mit der totalen relativen Krümmung Null sind Torsen.*

Beweis: Da die totale relative Krümmung als Produkt der Hauptkrümmungen definiert ist, so muß, wenn $K_{\text{t. r.}} = 0$ ist, eine dieser Hauptkrümmungen verschwinden, etwa $\lambda_1 = 0$. Führt man die Krümmungslinien als Parameterlinien ein und wendet (7) längs $v = \text{const}$ an, so folgt $\frac{d\mathfrak{y}}{du} - \lambda_1 \frac{d\mathfrak{x}}{du} = 0$. Da $\lambda_1 = 0$ ist, muß $\frac{d\mathfrak{y}}{du} = 0$, also $\mathfrak{y}(u) = \text{const}$ sein. Damit ist schon bewiesen, daß der Pol und somit die Tangentenebene selbst längs der Krümmungslinie $v = \text{const}$ fest bleibt. Zugleich folgt, daß diese Kurve eben ist. Nun erkennt man leicht, daß die Kurven $v = \text{const}$ Geraden sind, wenn man benutzt, daß $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\mathfrak{y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\mathfrak{x}\right) = 0$ gilt. Die Kurve $\mathfrak{x}(u)$ ist eben und liegt in der Polarebene zu $\mathfrak{y}$. Aus $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} = 0$ folgt, daß $\mathfrak{y}$ und auch $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}$ unabhängig von $u$ sind, daher ist $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}$ für $v = \text{const}$ konstant und liegt ebenfalls in der Polarebene zu $\mathfrak{y}$. Wegen $\left(\mathfrak{x}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) = 0$ muß die Kurve $\mathfrak{x}(u)$ auch völlig in der Polarebene zu $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}$ liegen, d. h. sie ist die Schnittgerade der beiden Polarebenen zu $\mathfrak{y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}$. Damit ist gezeigt worden, daß die Torsen und nur diese in allen drei Geometrien die Krümmung des Raumes haben.

### § 5. Sätze über Tangentenflächen und Normalenflächen.

Satz 5: *Die Tangentenfläche einer Kurve ist die Einhüllende der Schmiegebenen der Kurve.*

Beweis: Die Gleichung der Tangentenfläche lautet

$$\mathfrak{z}(s,\varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \varkappa\sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\dot{\mathfrak{x}}(s) \quad \text{mit} \quad (\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 1. \tag{3}$$

Der Pol der Tangentenebene liegt nach Definition orthogonal zu $\mathfrak{x}$, $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{x}}$; diese sind aber linear abhängig von $\mathfrak{x}$, Tangentenpunkt $\mathfrak{t}$ und Hauptnormalenpunkt $\mathfrak{n}$, wie man aus (3) sieht. Der Binormalenpunkt $\mathfrak{b}$ der Kurve ist aber als Pol der Ebene definiert, deren Punkte von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ linear abhängig sind. Also ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$, und die Tangentenebenen der Tangentenfläche (3) sind die Schmiegebenen von $\mathfrak{x}(s)$.

Satz 6: *Unter allen Tangentenflächen ist nur die Ebene eine Minimalfläche.*

Beweis: Eine Fläche ist Minimalfläche, wenn die mittlere relative Krümmung, also die Summe der Hauptkrümmungen, verschwindet. Da für Tangentenflächen schon das Produkt der Hauptkrümmungen verschwindet, so folgt, daß beide Hauptkrümmungen Null sind, d. h. jede Kurve der Fläche ist Krümmungslinie. Aus den obigen Betrachtungen folgt, daß längs jeder Parameterlinie $s = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ die Tangentenebene fest bleibt, d. h. die Fläche ist eine Ebene.

Man sieht aus der Definition der Torsen, daß diese Einhüllende von einparametrigen Ebenenscharen sind; denn für $s = \text{const}$ bleibt die Tangentenebene fest. Daher ist der Torse auch keine Polfläche $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s, \varphi)$ zugeordnet, sondern eine Polkurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s)$. Für die Tangentenflächen wurde diese eben zu $\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$ bestimmt. Nun gilt weiter:

Satz 7: $\mathfrak{x}(s)$ *ist die Polkurve der Tangentenfläche ihrer Polkurve* $\mathfrak{y}(s)$.

Beweis: Da $\mathfrak{y} = \mathfrak{b}$ und nach den FRENETschen Formeln $\dot{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{n}$ ist, so lautet die Tangentenfläche der Polkurve von $\mathfrak{x}(s)$

$$\mathfrak{z}^* = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{y} + \varkappa\sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\frac{\dot{\mathfrak{y}}}{\sqrt{\dot{\mathfrak{y}}\,\dot{\mathfrak{y}}}} = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{b} + \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{n}.$$

Jetzt ist die Polkurve dieser Torse zu bestimmen. Man weiß, daß alle Punkte der Tangentenebene linear abhängig von $\mathfrak{y}$, $\dot{\mathfrak{y}}$ und $\ddot{\mathfrak{y}}$ sind. Also sind sie linear abhängig von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$, $\dot{\mathfrak{b}}$, $\dot{\mathfrak{n}}$. Nach den FRENETschen Formeln ist $\dot{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{n}$ und $\dot{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathfrak{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{b}$, also wird die Tangentenebene ausgespannt von den drei linear unabhängigen Punkten $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$. Der gesuchte Pol $\mathfrak{y}^*$ dieser Tangentenebene muß sich nun linear

abhängig von den vier linear unabhängigen Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ darstellen lassen. Da nun dieser Pol zugleich orthogonal sein muß zu $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$, so folgt die Behauptung $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x}$.

Durch diesen Satz ist für die hyperbolische Geometrie jeder Tangentenfläche, deren erzeugende Kurve im Inneren liegt, eine Tangentenfläche, deren Erzeugende im Äußeren liegt, zugeordnet. Für die elliptische Geometrie ist die zugeordnete Tangentenfläche auch immer real.

Außerdem kann man mit Hilfe dieses Satzes leicht die Einhüllende einer gegebenen einparametrigen Ebenenschar berechnen, z. B. die Einhüllende der Normalebenen einer Raumkurve. Da die Normalebenen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannt werden, ist die Polkurve der gesuchten Einhüllenden $\mathfrak{y} = \mathfrak{t}$. Setzt man nun die Gleichung der Einhüllenden als Tangentenfläche

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{w}(s) + \varkappa \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\frac{\dot{\mathfrak{w}}(s)}{\sqrt{(\dot{\mathfrak{w}}\,\dot{\mathfrak{w}})}}$$

einer noch zu bestimmenden Kurve $\mathfrak{w}(s)$ an und benützt $\mathfrak{y} = \mathfrak{t}(s)$, so lautet die Lösung

$$\mathfrak{w}(s) = \frac{1}{\varkappa^2 + \varrho^2 + \tau^2\dot{\varrho}^2}\,(\varkappa\mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{n} - \tau\dot{\varrho}\,\mathfrak{b}). \tag{12}$$

Es läßt sich dann leicht zeigen, daß $\mathfrak{w}(s)$ der Ort der Mittelpunkte der Schmiegkugeln von $\mathfrak{x}(s)$ ist und daß die Bedingung für eine sphärische Raumkurve $\dot{\mathfrak{w}}(s) = 0$

$$\varrho^2 + \tau^2\dot{\varrho}^2 = \text{const} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}(\tau\dot{\varrho}) = 0 \tag{13}$$

lautet.

Satz 8: *Die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve ist nur dann eine Torse, wenn die Kurve eben ist.*

Beweis: Die Hauptnormalenfläche ist eine Regelfläche, die die Normalen der Raumkurve als Erzeugende hat. Daher ist ihre Gleichung

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{n} \tag{14}$$

mit $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}) = \varkappa^2$ und $(\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 1$.

Diese Regelfläche ist nur dann eine Torse, wenn die Torsenbedingung $|\,\mathfrak{x}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{n}\,\dot{\mathfrak{n}}\,| = 0$ erfüllt ist. Setzt man voraus, daß $s$ die Bogenlänge auf $\mathfrak{x}(s)$ ist, so gilt nach den FRENETschen Formeln $\dot{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{t}$ und $\dot{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{t} - \frac{1}{\tau}\mathfrak{b}$. Führt man dies in die Determinante ein und vereinfacht sie, so erhält man

$$\frac{1}{\varkappa}\,\frac{1}{\tau}\,|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{b}\,| = 0. \tag{15}$$

Solange $\mathfrak{x}$ ein realer Punkt ist, ist die Determinante in (15) von Null verschieden, da zwischen den vier zueinander orthogonalen Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ keine lineare Abhängigkeit bestehen kann. Also muß $\frac{1}{\tau} = 0$ sein, d. h. $\mathfrak{x}(s)$ muß eine ebene Kurve sein, damit ihre Hauptnormalenfläche eine Torse ist.

Satz 9: *Die Binormalenfläche einer Raumkurve ist nur dann eine Torse, wenn die Kurve eben ist.*

Beweis: Die Binormalenfläche ist eine Regelfläche, und ihre Gleichung schreibt sich, da $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}) = \varkappa^2$ ist,

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{x}(s) + \sin\frac{\varphi}{\varkappa}\,\mathfrak{b}. \tag{16}$$

(16) ist eine Torse, wenn $|\,\mathfrak{x}\;\dot{\mathfrak{x}}\;\mathfrak{b}\;\dot{\mathfrak{b}}\,| = 0$ ist. Ist der Parameter $s$ Bogenlänge auf $\mathfrak{x}(s)$, so folgt aus den FRENETschen Formeln $\dot{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{t}$ und $\dot{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\tau}\,\mathfrak{n}$. Führt man dies in die Determinante ein, so erhält man wieder den Ausdruck (15), und es folgt wie oben, daß die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ eben sein muß, damit ihre Binormalenfläche eine Torse ist.

## § 6. Die rektifizierende Fläche einer Raumkurve.

Auch für die nichteuklidische Geometrie gilt bekanntlich, daß eine Kurve auf einer Fläche geodätische Linie ist, wenn die Flächennormale $\mathfrak{y}$ mit der Hauptnormale $\mathfrak{n}$ der Kurve zusammenfällt. Das sieht man so ein: Man definiert die geodätische Krümmung einer Kurve auf einer Fläche durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\cos\sigma}{\varrho},$$

wo $\varrho$ die Krümmung der Kurve und $\sigma$ der Winkel der Schmiegebene der Kurve mit der Tangentenebene der Fläche im Punkte $\mathfrak{x}$ ist. Der Winkel zweier Ebenen wird gemessen durch den Abstand ihrer Pole. Der Pol der Tangentenebene ist $\mathfrak{y}$, der Pol der Schmiegebene einer Raumkurve $\mathfrak{b}$, also ist $\cos\sigma = \frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y})}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\varrho_g} = \frac{(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y})}{\varkappa^2\varrho}$. Man sieht, aus $\frac{1}{\varrho_g} = 0$ folgt entweder $\frac{1}{\varrho} = 0$, d. h. jede Gerade auf einer Fläche ist geodätische Linie der Fläche, oder $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}) = 0$. Da $\mathfrak{y}$ stets orthogonal zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}$ liegt, so folgt $\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$ wegen $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}) = 0$. Also ist eine Linie geodätisch, wenn Flächennormalenpunkt gleich Hauptnormalenpunkt der Kurve auf der Fläche ist. Daher muß die rektifizierende Fläche einer Raumkurve die Einhüllende ihrer rektifizierenden Ebenen sein. Dann ist nämlich der Pol der Tangentenebene $\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$.

Macht man für die Gleichung der Torse den Ansatz

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{\varkappa}\, \mathfrak{x}(s) + \sin \frac{\varphi}{\varkappa}\, \mathfrak{w}(s)$$

mit der Voraussetzung

$$(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}) = \varkappa^2,\ (\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 1,\ (\mathfrak{x}\,\mathfrak{w}) = 0,$$

so folgt, da $\mathfrak{w}$ in der rektifizierenden Ebene liegen muß und diese von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ ausgespannt wird,

$$\mathfrak{w}(s) = \lambda_1 \mathfrak{x} + \lambda_2 \mathfrak{t} + \lambda_3 \mathfrak{b}.$$

Aus $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{w}) = 0$ folgt noch $\lambda_1 = 0$, also $\mathfrak{w} = \lambda_2 \mathfrak{t} + \lambda_3 \mathfrak{b}$. Da diese Regelfläche Einhüllende einer einparametrigen Ebenenschar ist, so ist sie eine Torse, und die Torsenbedingung $|\,\mathfrak{x}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{w}\ \dot{\mathfrak{w}}\,| = 0$ muß erfüllt sein. Führt man $\mathfrak{w} = \lambda_2(s)\mathfrak{t} + \lambda_3(s)\mathfrak{b}$ und $\dot{\mathfrak{w}} = \dot{\lambda}_2 \mathfrak{t} + \dot{\lambda}_3 \mathfrak{b} + \lambda_2 \dot{\mathfrak{t}} + \lambda_3 \dot{\mathfrak{b}}$ ein und vereinfacht die Determinante, so folgt

$$\lambda_3 \left(\lambda_2 \frac{1}{\varrho} + \lambda_3 \frac{1}{\tau}\right) |\,\mathfrak{x}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{n}\ \mathfrak{b}\,| = 0.$$

Die Determinante ist für jeden realen Punkt von Null verschieden, da die vier Punkte ein orthogonales System bilden. Also muß der Faktor vor der Determinante $\lambda_3 \left(\lambda_2 \frac{1}{\varrho} + \lambda_3 \frac{1}{\tau}\right) = 0$ sein. $\lambda_3 = 0$ gibt die Tangentenfläche $\mathfrak{w} = \mathfrak{t}$, aus $\lambda_3 \neq 0$ folgt $\lambda_2 = -\frac{\varrho}{\tau}\lambda_3$. Aus $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}) = \varkappa^2$ ergibt sich

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}}},$$

und die Gleichung der Torse ist

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{\varkappa}\, \mathfrak{x}(s) + \sin \frac{\varphi}{\varkappa} \frac{\mathfrak{b} - \frac{\varrho}{\tau}\mathfrak{t}}{\sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}}}. \tag{17}$$

Man sieht, daß für $\frac{1}{\tau} = 0$, also für eine ebene Kurve $\mathfrak{x}(s)$, die rektifizierende Fläche die Gestalt

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{\varkappa}\, \mathfrak{x}(s) + \sin \frac{\varphi}{\varkappa}\, \mathfrak{b} \tag{18}$$

mit $\mathfrak{b} = \text{const}$ erhält, also ein Kegel ist. Es gilt

Satz 10: *Die rektifizierende Fläche einer ebenen Kurve ist der Kegel durch diese Kurve, dessen Spitze Pol der Ebene ist, in der die Kurve liegt.*

Dieses Resultat wird zur Abwicklung der Kegel auf die Ebene gebraucht.

## § 7. Abwicklung der Kegel.

Es wurde gezeigt, daß die Kegel stets die Krümmung des umgebenden Raumes haben, genau wie die Ebenen in diesem Raum. Man kann also die Kegel auf die Ebenen des Raumes abwickeln, d. h. längen- und winkeltreu abbilden. Als Modelle der ebenen nichteuklidischen Geometrien wählt man dabei die projektiven Modelle. Die Kegel sind gegeben durch die Gleichung (4) bzw., wenn die Spitze des Kegels auf dem absoluten Gebilde liegt, durch die Gleichung (5). Man kann die Abwicklung vollständig beschreiben, wenn man weiß, in welche Kurven die Parameterlinien des Kegels dabei übergehen. Die Erzeugenden $s$ = const, die Geraden des Kegels, gehen wieder in Geraden über, da die geodätische Krümmung bei der Abwicklung invariant bleibt. Außerdem erkennt man aus (4) und (5) leicht, daß die Parameterlinien $\varphi$ = const bzw. $\lambda$ = const auf den Geraden $s$ = const senkrecht stehen. Die Abwicklung ist winkeltreu, daher gehen die Linien $\varphi$ = const bzw. $\lambda$ = const in die orthogonalen Trajektorien eines Geradenbüschels über, d. h. in Stücke von eigentlichen, Grenz- oder Überkreisen, je nachdem ob die Spitze des Kegels im Inneren, auf dem Absoluten oder im Äußeren liegt. Außerdem wird noch benützt, daß der Kegel, dessen Spitze nicht auf dem Absoluten liegt, bei der Abwicklung diejenige Kurve auf dem Kegel in ein Geradenstück überführt, also rektifiziert, die in der Polarebene der Spitze des Kegels liegt. Für die elliptische Geometrie gibt es nur eine Kegelart. Die Spitze des Kegels ist immer ein realer Punkt $P$, es gilt immer Gleichung (4). Die Länge der Kurve $\mathfrak{x}(s)$, die rektifiziert wird, sei $l$. Schneidet man den Kegel längs einer Erzeugenden $g$ auf und wickelt ihn auf die projektive Ebene ab und bildet dabei die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ ein Stück einer Geraden $h$, so fällt die Spitze des Kegels in den Pol dieser Geraden. Denn nur die Geraden, die vom Pol der Geraden $h$ ausgehen, stehen senkrecht auf $h$. Die orthogonalen Trajektorien dieses Geradenbüschels sind die Kreise, deren Mittelpunkt der Pol von $h$ ist. Das sind die Bilder der Parameterlinien $\varphi$ = const. Man erhält durch diese Kegel keine reguläre Raumform der elliptischen Geometrie, da nur durch elliptische Drehungen um $P$ die ganze elliptische Ebene überdeckt werden könnte. Die Überdeckungsgruppe einer Raumform muß aber fixpunktfrei sein.

In der euklidischen Geometrie unterscheidet man zwei Kegelarten: Zylinder und Kegel. Der Zylinder liefert eine unendliche Raumform (= Raumform von unendlicher Ausdehnung) der euklidischen Geometrie.

In der hyperbolischen Geometrie hat man drei Kegelarten zu unterscheiden, je nach Lage der Spitze im Innern des Absoluten, auf dem

Absoluten oder im Äußern des Absoluten. Im ersten Falle ist der singuläre Punkt des Kegels, die Spitze, real, in den beiden anderen Fällen nicht. Diese liefert daher eine unendliche Raumform der hyperbolischen Geometrie. Für die Abwicklung des ersten Kegels werde angenommen, die Spitze $P$ des Kegels falle in den Mittelpunkt $M$ des absoluten Gebildes der hyperbolischen Geometrie. Die Geraden $s = \text{const}$ gehen dann in Geraden durch $M$ über, die Linien $\varphi = \text{const}$ in Bogen der eigentlichen Kreise um $M$. Dieser Kegel entspricht den Kegeln der elliptischen und euklidischen Geometrie und liefert aus demselben Grunde keine Raumform der hyperbolischen Geometrie.

Liegt die Spitze des Kegels auf dem absoluten Gebilde, schneidet man ihn längs einer Erzeugenden $g$ auf und wickelt ihn ab, so geht die Spitze in einen Punkt $P$ des ebenen absoluten Gebildes über, die Geraden $s = \text{const}$ in Geraden durch $P$. Sie sind also parallel im Sinne der hyperbolischen Geometrie. Die Parameterlinien $\lambda = \text{const}$ gehen in Bogen von Grenzkreisen über, deren Mittelpunkt $P$ ist; denn diese sind die orthogonalen Trajektorien zu den Geraden durch $P$. Dieser Kegel ist eine unendliche Raumform der hyperbolischen Geometrie. Man kann den Kegel unendlich oft auf der hyperbolischen Ebene abrollen, erst dann ist die hyperbolische Ebene bedeckt. Die Gruppe dieser Überdeckungen hat keinen realen Fixpunkt. Dieser Kegel entspricht dem Zylinder in der euklidischen Geometrie. Um die Gruppe der Überdeckungen wirklich anzugeben, muß man diesen Kegel auf das Poincaré'sche Modell der hyperbolischen Geometrie, die Halbebene, abwickeln. Legt man bei der Abwicklung die Spitze des Kegels nicht auf irgendeinen Punkt der reellen Achse, sondern auf den unendlich fernen Punkt, so gehen die Geraden $s = \text{const}$ in Geraden über, die die reelle Achse senkrecht schneiden, und die Linien $\lambda = \text{const}$ in Abschnitte von Grenzkreisen durch den Punkt $\infty$, d. h. euklidisch betrachtet, in Strecken auf den Parallelen zur reellen Achse. Die Gruppe der Überdeckungen ist gegeben durch $w = z + nl$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, wo $l$ die Länge der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ ist.

Denkt man sich die Gleichung des Kegels in der Form (4) gegeben, dann wird bei der Abwicklung die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ mit der Länge $l$ rektifiziert; sie bilde ein Stück der Geraden $h$. Die Erzeugenden $s = \text{const}$ gehen in die Senkrechten zu $h$ über, d. h. sie schneiden sich alle im Pol $P$ der Geraden $h$. Der Pol $P$ ist das Bild der Spitze des Kegels. Die Parameterlinien $\varphi = \text{const}$ gehen in Bogen von Überkreisen über, deren Mittelpunkt $P$ ist. Trägt man auf der Geraden immer wieder $l$ ab und verbindet den Endpunkt mit $P$, so hat man damit stets von neuem den Kegel abgewickelt. Um die ganze hyperbolische Ebene zu be-

decken, muß man den Kegel unendlich oft abwickeln. Man hat also auch in diesem Kegel eine unendliche Raumform der hyperbolischen Geometrie; denn die Decktransformationen haben keinen realen Fixpunkt. Die Raumform hat weder in der elliptischen noch in der hyperbolischen Geometrie ein Gegenstück, da es dort diese Kegelart nicht gibt.

Übrigens kann man die drei Typen der Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung (mit der Krümmung $\mathfrak{K} = -1$) auf die drei Kegelarten der hyperbolischen Geometrie abwickeln. Als Kegel kann man Rotationskegel wählen. Der konische Typus läßt sich längentreu auf den Kegel mit der Spitze im Innern des Absoluten abbilden, die Rotationsfläche der Traktrix auf den Kegel, dessen Spitze auf dem Absoluten liegt, und der Spindeltypus auf den Kegel, dessen Spitze im Äußern liegt. Die Flächen überdecken die Kegel dabei nur zum Teil, da die Rückkehrkanten nicht überschritten werden können, und zwar gehen die Rückkehrkanten in einen Meridian des Kegels über. Die beiden ersten Kegel werden von der Spitze bis zu einem Meridian bedeckt, der letzte nur zwischen zwei Meridianen.

## Zweiter Teil.

## Rotationsflächen konstanter Krümmung.

### § 1. Bestimmung der Gleichung der Rotationsflächen konstanter Krümmung.

Setzt man das Linienelement einer Fläche in der Form

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + dv^2, \tag{19}$$

also

$$E = E(u, v), \quad F = 0, \quad G = 1,$$

an, so ist, da die GAUSSsche Krümmung $\mathfrak{K}$ einer Fläche eine Biegungsinvariante und bei gegebenem Bogenelement unabhängig von der Krümmung des Raumes ist, wie schon aus der euklidischen Differentialgeometrie bekannt ist,

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2}. \tag{20}$$

Für konstantes $\mathfrak{K}$ sind die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung für $E$

$$\begin{cases} \sqrt{E} = c_1 v + c_2 & \text{für } \mathfrak{K} = 0, \\ \sqrt{E} = c_1 \cos \sqrt{\mathfrak{K}}\, v + c_2 \sin \sqrt{\mathfrak{K}}\, v & \text{für } \mathfrak{K} > 0, \\ \sqrt{E} = c_1 \mathfrak{Cof} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\, v + c_2 \mathfrak{Sin} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\, v & \text{für } \mathfrak{K} < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Die $c_\nu$ sind willkürliche Funktionen von $u$. Man kann nun aber nicht schließen, daß die Rotationsflächen konstanter Krümmung im Euklidischen dies auch im elliptischen und im hyperbolischen Fall sind; denn die Beziehungen zwischen $E$ und $\mathfrak{x}$ sind in den drei Geometrien verschieden. Schon im ersten Teil zeigte sich, wie durch die Krümmung des umgebenden Raumes die Maßbestimmung und damit auch die Krümmung einer Fläche bestimmt wird.

Die Gleichung der Rotationsfläche lautet

$$X = f(v)\cos u,\quad Y = f(v)\sin u,\quad Z = g(v). \tag{22}$$

Man betrachtet für den hyperbolischen Fall nur die Punkte, für die

$$f^2 + g^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \leqq 1$$

ist. Führt man homogene Koordinaten

$$X = \frac{x_1}{\bar{x}_0},\quad Y = \frac{x_2}{\bar{x}_0},\quad Z = \frac{x_3}{\bar{x}_0}$$

ein und setzt $\bar{x}_0 = \frac{1}{\varkappa}\, x_0$ für die hyperbolische Geometrie und zur Vereinfachung der Rechnung auch für die elliptische Geometrie (denn dort spielt der Faktor $\varkappa$ keine Rolle, da zur Diskussion der Ergebnisse $\varkappa^2 = 1$ gesetzt wird), so schreibt sich bei der Normierung $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=0}^{3} x_\nu^2 = \varkappa^2$ die Gleichung der Flächen in homogenen Koordinaten

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\varkappa f(v)\cos u}{\sqrt{N}}, & x_2 = \dfrac{\varkappa f(v)\sin u}{\sqrt{N}}, \\ x_3 = \dfrac{\varkappa g(v)}{\sqrt{N}}, & x_0 = \dfrac{\varkappa^2}{\sqrt{N}} \end{cases} \tag{23}$$

mit $N(v) = \varkappa^2 + f^2 + g^2$. Die Fundamentalgrößen berechnen sich zu

$$\begin{cases} E = \dfrac{\varkappa^2 f^2(v)}{\varkappa^2 + f^2(v) + g^2(v)} = E(v), \\ G = \dfrac{\varkappa^2}{(\varkappa^2 + f^2 + g^2)^2}\,[\varkappa^2(f'^2(v) + g'^2(v)) + (g'f - f'g)^2] = G(v). \end{cases} \tag{24}$$

Die Funktionen $f(v)$ und $g(v)$ werden durch die Forderung bestimmt, daß das Bogenelement die Gestalt (19) haben soll. Man könnte nun erst durch eine Transformation $v^* = v^*(v)$ auf den Parameterlinien $u = \text{const}$ die Bogenlänge $v^*$ als Parameter einführen. Dann wäre $G = 1$ erfüllt. Es ist aber einfacher zu fordern, daß $v$ auf $u = \text{const}$ Bogenlänge ist, und $f(v)$ und $g(v)$ so zu bestimmen, daß das Bogenelement der Fläche $ds^2 = E\,du^2 + dv^2$ wird, wobei die Funktion $E$ durch (21) gegeben ist. Durch $G = 1$ wird eine Differentialgleichung erster Ordnung in $f(v)$ und $g(v)$ gegeben. Daß $E$ je nach der Krümmung eine der Funktionen (21) sein muß, ergibt eine weitere Beziehung zwischen $f(v)$ und $g(v)$. Da $E$ für Rotationsflächen nach (24) nur von $v$

abhängt, sind die Funktionen $c_\nu = c_\nu(u)$ in (21) Konstanten. Führt man eine Hilfsfunktion

$$\psi(v) = \sqrt{E}$$

ein, setzt also $\psi(v) = \frac{\varkappa f}{\sqrt{\varkappa^2 + f^2 + g^2}}$, und eliminiert man $f(v)$, so folgt

$$f(v) = \psi \sqrt{\frac{\varkappa^2 + g^2}{\varkappa^2 - \psi^2}}, \quad \sqrt{N} = \varkappa \sqrt{\frac{\varkappa^2 + g^2}{\varkappa^2 - \psi^2}}.$$

Dann lautet die Parameterdarstellung der Flächen

$$(25) \qquad \begin{cases} x_1 = \psi(v)\cos u, & x_2 = \psi(v)\sin u, \\ x_3 = g(v)\sqrt{\frac{\varkappa^2 - \psi^2}{\varkappa^2 + g^2}}, & x_0 = \varkappa \sqrt{\frac{\varkappa^2 - \psi^2}{\varkappa^2 + g^2}}, \end{cases}$$

und die Fundamentalgrößen ergeben sich zu

$$E = \psi^2(v), \quad F = 0,$$

$$G = \frac{\varkappa^2}{(\varkappa^2 - \psi^2)(\varkappa^2 + g^2)^2}\left(\psi'^2(\varkappa^2 + g^2)^2 + g'^2(\varkappa^2 - \psi^2)^2\right).$$

Setzt man $G = 1$, so folgt als Differentialgleichung für $g(v)$

$$\sqrt{\frac{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}{\varkappa^2(\varkappa^2 - \psi^2)^2}} = \frac{g'}{\varkappa^2 + g^2},$$

in der die Veränderlichen getrennt sind.

I. Hyperbolische Geometrie. Setzt man $\varkappa^2 = -1$ und berücksichtigt $f^2 + g^2 < 1$, also auch $g^2 < 1$, so wird

$$\frac{-dg}{1 - g^2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \psi^2 - \psi'^2}{(1 + \psi^2)^2}}\, dv,$$

also

$$-\operatorname{Ar}\operatorname{Tg} g = \int \pm \sqrt{\frac{1 + \psi^2 - \psi'^2}{(1 + \psi^2)^2}}\, dv.$$

Das Vorzeichen spielt keine Rolle, da man das Vorzeichen der Wurzel beliebig wählen kann. Es ist

$$(26) \qquad g(v) = \operatorname{Tg}\left(\int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - \psi'^2}}{1 + \psi^2}\, dv + c\right) = \operatorname{Tg}(J + c).$$

Setzt man (26) in $f = \psi\sqrt{\frac{\varkappa^2 + g^2}{\varkappa^2 - \psi^2}}$ ein, so ergibt sich

$$(27) \qquad f(v) = \frac{\psi}{\sqrt{1 + \psi^2}\operatorname{Cof}(J + c)}.$$

II. Elliptische Geometrie. Setzt man $\varkappa^2 = +1$, so erhält man

$$\frac{dg}{1 + g^2} = \frac{\sqrt{1 - \psi^2 - \psi'^2}}{1 - \psi^2}\, dv,$$

also

$$(28) \qquad g(v) = \operatorname{tg}\left(\int \sqrt{\frac{1 - \psi^2 - \psi'^2}{1 - \psi^2}}\, dv + c\right) = \operatorname{tg}(J + c).$$

Setzt man (28) in $f$ ein, so ergibt sich

$$f(v) = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} \frac{1}{\cos(J+c)}. \tag{29}$$

Damit sind die Erzeugenden der Rotationsflächen konstanter Krümmung im hyperbolischen und elliptischen Raum berechnet; die Aufgabe ist bis auf eine Quadratur gelöst.

III. Euklidische Geometrie. Setzt man $\frac{1}{\varkappa^2} = 0$ und bestimmt die Grenzwerte von $f(v)$ und $\frac{g'}{\varkappa^2 + g^2} = \sqrt{\frac{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}{\varkappa^2(\varkappa^2-\psi^2)^2}}$, so folgt

$$f' = \psi(v), \tag{30}$$

$$g' = \sqrt{1-\psi'^2}, \quad g = \int \sqrt{1-\psi'^2}\, dv + c. \tag{31}$$

Man erhält also richtig die Erzeugenden der Rotationsflächen konstanter Krümmung im euklidischen Raum.

## § 2. Hilfsbetrachtungen.

Bei den folgenden Ableitungen ist es empfehlenswert, für den Parameter $v$ den Parameter $\psi$ auf der Fläche einzuführen. Dann hat man für $\psi'(v) \neq 0$ das Integral

$$J(\psi) = \int \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}}{\psi' \varkappa (\varkappa^2 - \psi^2)}\, d\psi \tag{32}$$

zu betrachten. Hierin muß man $\psi'$ und $\psi''$ durch $\psi$ ausdrücken. Für $\psi''$ folgt aus der Definition $\psi = \sqrt{E}$ für jedes $\mathfrak{K}$

$$\psi'' = -\mathfrak{K}\psi, \tag{33}$$

und für $\psi'$ erhält man $\psi' = c_1$ im Fall $\mathfrak{K} = 0$, $\psi' = \sqrt{\mathfrak{K}}\sqrt{C^2 - \psi^2}$ mit $C^2 = c_1^2 + c_2^2$ im Fall $\mathfrak{K} > 0$, $\psi' = \sqrt{|\mathfrak{K}|}\sqrt{C + \psi^2}$ mit beliebigem $C$ im Fall $\mathfrak{K} < 0$.

Zur Diskussion der Flächen ist es wichtig, die geodätische Krümmung $\varrho_g$ der Parameterlinien zu kennen, die durch $\frac{1}{\varrho_g} = \frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{y})}{\varrho\varkappa^2}$ definiert ist, wo $\varrho$ die Krümmung der Kurve, $\mathfrak{b}$ der Binormalenpunkt der Kurve und $\mathfrak{y}$ der Flächennormalenpunkt in diesem Punkt der Fläche ist. Für die Erzeugenden der Rotationsflächen, also die Parameterlinien $u = \text{const}$, ist $(\mathfrak{b}\mathfrak{y}) = 0$; denn $\mathfrak{y}$ liegt in der Ebene, in der die Erzeugende liegt, und $\mathfrak{b}$ ist nach Definition der Pol dieser Ebene und für eine ebene Kurve konstant. Daher ist $\frac{1}{\varrho_g} = 0$, und die Erzeugenden sind geodätische Linien der Rotationsflächen. Für die Kreise, also die Parameterlinien $v = \text{const}$, ist $\frac{1}{\varrho_g} = \text{const}$; denn $\mathfrak{b}$ ist wieder konstant, da man eine ebene Kurve betrachtet, und liegt auf der $Z$-Achse. Die

Flächennormalen längs der Kreise bilden einen Rotationskegel um die $Z$-Achse, ihre Pole $\mathfrak{y}$ beschreiben daher einen Kreis auf diesem Kegel, und der Abstand $(\mathfrak{y}\,\mathfrak{b})$ ist konstant; die Krümmung der Kreise $v$ =const ist es ebenfalls, und damit ist die geodätische Krümmung der Parameterlinien $v$ = const konstant.

### § 3. Übertragung des Satzes von Beltrami über Rotationsflächen konstanter Krümmung auf die nichteuklidischen Geometrien.

I. Hyperbolische Geometrie. Der Scharparameter der von BELTRAMI betrachteten Schar von Rotationsflächen konstanter Krümmung, deren orthogonale Trajektorien dann wieder Flächen konstanter Krümmung sind, ist die Integrationskonstante $c$ in der Beziehung (31). Bei der Veränderung dieser Konstanten wird die betrachtete Fläche längs der $Z$-Achse verschoben. Diese Transformation ist eine Bewegung der euklidischen Geometrie. Untersucht man, was der Transformation $J^* = J + c$ in (26) und (27) entspricht, so erweist sich diese als eine Bewegung der hyperbolischen Geometrie.

Die durch (26) und (27) bestimmten Rotationsflächen haben nämlich nach (25) in homogenen Koordinaten die Gleichung

$$(34)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi \cos u, & x_2 = \psi \sin u, \\ x_3 = \sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Sin}\,J, & x_0 = i\sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Cof}\,J. \end{cases}$$

Betrachtet man die Flächen mit $J^* = J + c$:

$$(35)\qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \psi \cos u, & x_2 = \psi \sin u, \\ \bar{x}_3 = \sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Sin}\,J^*, & x_0 = i\sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Cof}\,J^* \end{cases}$$

und sucht die Transformation $x_\nu = x_\nu(x_1, x_2, x_3, x_0)$ für jeden Punkt des Raumes, so erhält man durch Anwendung des Additionstheorems für Hyperbelfunktionen

$$(36)\qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1, & x_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 = x_3\,\mathfrak{Cof}\,c + \frac{x_0}{i}\,\mathfrak{Sin}\,c, & \bar{x}_0 = i\,x_3\,\mathfrak{Sin}\,c + x_0\,\mathfrak{Cof}\,c. \end{cases}$$

Da $\sum_{\nu=0}^{3} x_\nu^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2$ ist, so ist diese Transformation eine Bewegung der hyperbolischen Geometrie; denn das absolute Gebilde $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = 0$ geht bei dieser Transformation in sich über. Der Satz von BELTRAMI läßt sich nun so übertragen:

Satz 11: *Erteilt man einer Rotationsfläche der konstanten Krümmung $\mathfrak{K}$ alle Transformationen* (36) *und bestimmt die Rotationsflächen, die jede Fläche dieser Schar orthogonal schneiden, so haben diese Flächen die konstante Krümmung* $\mathfrak{K}^* = -(1 + \mathfrak{K})$.

Beweis: Man betrachtet die Erzeugenden der Rotationsflächen

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi \cos u, & x_2 = \psi \sin u, \\ x_3 = \sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Sin}\,(J+c), & x_0 = i\sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Cof}\,(J+c) \end{cases}$$

bei festem $\mathfrak{K}$ und $C$ und veränderlichem $c$ in der Ebene $x_2 = 0$ und bestimmt die Normalenrichtungen dieser Kurven, eliminiert den Scharparameter $c$ und setzt die Normalenrichtung der Tangentenrichtung der gesuchten orthogonalen Trajektorien gleich. Wählt man $v$ als Parameter auf den Erzeugenden, so ist (wegen $(\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}}) = 1$) dieser Bogenlänge auf den Kurven, und die FRENETschen Formeln können zur Berechnung des Normalenpunktes der Erzeugenden Verwendung finden. Es ist dann

$$\mathfrak{n} = \frac{\varrho}{\varkappa}(\ddot{\mathfrak{x}} + \varkappa^2 \mathfrak{x}) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\varrho^2} = (\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}) + 1.$$

Zur Ausführung dieses Gedankens stelle man die Gleichung der Erzeugenden auf:

$$(38)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi, & x_2 = 0, \\ x_3 = \sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Sin}\,(J+c), & x_0 = i\sqrt{1+\psi^2}\,\mathfrak{Cof}\,(J+c). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{n}$ und $\varrho$ bildet man die Ableitungen $\frac{dx_\nu}{dv}$ und $\frac{d^2x_\nu}{dv^2}$ und findet

$$(39)\qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\psi^2(1+\mathfrak{K})^2}{1+\psi^2-\psi'^2}.$$

Aus (39) läßt sich für $\varrho^2 = \text{const}$ die Gestalt von $\psi'^2$ bestimmen. Man erhält damit die Kugeln unter den Rotationsflächen konstanter Krümmung.

Berechnet man nun den Normalenpunkt $\mathfrak{n}$, führt $x_1$ aus (38) für $\psi$ ein, setzt $\psi' = w(x_1)$, wo nach den Hilfsbetrachtungen aus § 2

$$(40)\qquad \begin{cases} w(x_1) = c_2 \quad \text{oder} \quad w^2(x_1) = \mathfrak{K}(C^2 - x_1^2) \\ \qquad\quad \text{oder} \quad w^2(x_1) = |\,\mathfrak{K}\,|\,(x_1^2 + C) \end{cases}$$

ist, und eliminiert die Scharparameter durch Einsetzen von

$$\mathfrak{Sin}\,(J+c) = \frac{x_3}{\sqrt{1+x_1^2}}, \quad \mathfrak{Cof}\,(J+c) = \frac{x_0}{i\sqrt{1+x_1^2}}$$

aus (38), so erhält man für die Tangentenrichtungen der gesuchten orthogonalen Trajektorien

$$(41')\qquad \frac{dx_1}{dv} = -\sqrt{1+x_1^2-w^2},$$

$$(41'')\qquad \frac{dx_3}{dv} = \frac{-x_1\sqrt{1+x_1^2-w^2}}{1+x_1^2}\,x_3 + \frac{w}{1+x_1^2}\,\frac{x_0}{i},$$

$$(41''')\qquad \frac{1}{i}\frac{dx_0}{dv} = \frac{-x_1\sqrt{1+x_1^2-w^2}}{1+x_1^2}\,\frac{x_0}{i} + \frac{w}{1+x_1^2}\,x_3, \quad (\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}) = 1.$$

Man muß jetzt aus (41) zeigen, daß wieder Erzeugende von Rotationsflächen konstanter Krümmung vorliegen. Dazu geht man zu inhomogenen Koordinaten $X$ und $Z$ über, berechnet diese als Funktionen von $x_1$ und weist nach, daß sie mit den Gleichungen (26) und (27) für $f(v)$ und $g(v)$ identisch sind und daß $x_1$ als Funktion von $v$ der Differentialgleichung $\frac{d^2x_1}{dv^2} = -\mathfrak{K}^* x_1$ genügt.

Die Rechnung liefert ohne große Mühe

$$Z = \mathfrak{Tg}\left(\int \frac{\sqrt{1+x_1^2-x_1'^2}}{1+x_1^2}\,dv + c^*\right) = \mathfrak{Tg}\,(J + c^*),$$

$$X = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}\,\mathfrak{Cof}\,(J+c^*)}.$$

Man muß jetzt nur noch das Bestehen der Differentialgleichung für $x_1$, die Konstanz von $\mathfrak{K}^*$ und die Zuordnung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ feststellen. Es berechnet sich $\frac{d^2x_1}{dv^2}$ aus (41′) durch Differentiation zu

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} = x_1 - w\frac{dw}{dx_1}. \tag{42}$$

Für die weiteren Untersuchungen muß man wieder die Flächen mit der Krümmung $\mathfrak{K} = 0$, $\mathfrak{K} > 0$ und $\mathfrak{K} < 0$ getrennt behandeln.

Für $\mathfrak{K} = 0$ ist

$$w(x_1) = c_1, \quad \text{also} \quad \frac{dw}{dx_1} = 0,$$

und aus (42) folgt

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} = x_1 = -\mathfrak{K}^* x_1, \quad \mathfrak{K}^* = -1. \tag{43}$$

Die Torsen sind also die orthogonalen Trajektorien zu den Flächen mit euklidischer Maßbestimmung im hyperbolischen Raum. Es muß sich aber auch jeder Konstanten $c_1$ eine Konstante $C^*$ zuordnen lassen. Dazu setzt man $w(x_1) = c_1$ in (41′) ein und erhält

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 = 1 - c_1^2 + x_1^2 = |\mathfrak{K}^*|\,(C^* + x_1^2).$$

Der Vergleich ergibt

$$C^* = 1 - c_1^2. \tag{44}$$

Für $\mathfrak{K} > 0$ ist

$$w^2(x_1) = \mathfrak{K}C^2 - \mathfrak{K}x_1^2, \quad \text{also} \quad w\frac{dw}{dx_1} = -\mathfrak{K}x_1.$$

Damit ergibt sich aus (42)

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} = (1+\mathfrak{K})x_1 = -\mathfrak{K}^* x_1, \quad \mathfrak{K}^* = -(1+\mathfrak{K}). \tag{45}$$

(45) bedeutet, daß die Flächen mit der negativen Krümmung $|\mathfrak{K}^*| > 1$ orthogonal zu den Flächen mit positiver Krümmung sind. Die Zuordnung der Konstanten folgt aus (41′) zu

$$C^* = \frac{1 - \mathfrak{K} c_1^2}{1 + \mathfrak{K}}. \tag{46}$$

Für $\mathfrak{K} < 0$ ist

$$w^2(x_1) = |\mathfrak{K}|(x_1^2 + C), \quad \text{also} \quad w\frac{dw}{dx_1} = |\mathfrak{K}| x_1.$$

Also liefert (42)

$$\frac{d^2 x_1}{dv^2} = -(|\mathfrak{K}| - 1) x_1 = -\mathfrak{K}^* x_1, \quad \mathfrak{K}^* = |\mathfrak{K}| - 1. \tag{47}$$

Jetzt hat man drei Fälle zu unterscheiden:

Für $|\mathfrak{K}| < 1$ ist $\mathfrak{K}^* = -(1 - |\mathfrak{K}|) < 0$, $C^* = \frac{1 - |\mathfrak{K}| C}{1 - |\mathfrak{K}|}$,

für $|\mathfrak{K}| = 1$ ist $\mathfrak{K}^* = 0$, $c_1^{*2} = 1 - C$,

für $|\mathfrak{K}| > 1$ ist $\mathfrak{K}^* = |\mathfrak{K}| - 1 > 0$, $C^{*2} = \frac{|\mathfrak{K}| C - 1}{|\mathfrak{K}| - 1}$.

Als Folgerung läßt sich aus (41′), (41″), (41‴) erkennen, daß die Rotationsfläche, die jede Einzelfläche der oben definierten Schar von Rotationsflächen der konstanten Krümmung $\mathfrak{K}$ orthogonal schneidet, die Krümmung $\mathfrak{K}^* = -(1 + \mathfrak{K})$ hat.

Eine einfache Anwendung dieser Ergebnisse wird später gegeben werden, und zwar bei der Betrachtung der Bilder bestimmter Rotationsflächen konstanter Krümmung im (Poincaréschen) Halbraum.

II. Elliptische Geometrie. Da der Beweis des Beltramischen Satzes ausführlich für die hyperbolische Geometrie gegeben wurde, wird er für die elliptische Geometrie auf eine knappe Angabe der Resultate der einzelnen Schritte beschränkt.

Die Transformation $J^* = J + c$ erweist sich auch in der elliptischen Geometrie als eine Bewegung des Raumes. Der Transformation entspricht nämlich die Koordinatentransformation

$$\begin{cases} x_1 = x_1, & x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3 \cos c + x_0 \sin c, & x_0 = -x_3 \sin c + x_0 \cos c \end{cases} \tag{48}$$

mit $\sum_{\nu=0}^{3} x_\nu^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2$, d. h. das absolute Gebilde $(\xi\xi) = 0$ wird bei dieser Transformation in sich übergeführt. Der Satz von Beltrami läßt sich jetzt so übertragen:

Satz 12: *Erteilt man einer Rotationsfläche konstanter Krümmung $\mathfrak{K}$ alle Transformationen* (48) *und bestimmt die Rotationsflächen, die jede Fläche dieser Schar orthogonal schneiden, so haben diese Flächen die konstante Krümmung $\mathfrak{K}^* = 1 - \mathfrak{K}$.*

Der Beweis wird geführt wie für die hyperbolische Geometrie. Die Gleichung der Flächenschar lautet

$$(49)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi \cos u, & x_2 = \psi \sin u, \\ x_3 = \sqrt{1-\psi^2}\sin(J+c), & x_0 = \sqrt{1-\psi^2}\cos(J+c) \end{cases}$$

bei festem $\mathfrak{K}$ und $C$ und veränderlichem $c$. Man betrachtet wieder die Erzeugenden der Flächen (49) in der Ebene $x_2 = 0$, bestimmt deren Normalenrichtung, eliminiert $\psi$ und den Scharparameter $c$ und setzt die Normalenrichtung der Tangentenrichtung der gesuchten orthogonalen Trajektorien gleich. Die Gleichungen der Erzeugenden lauten

$$(50)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi(v), \\ x_3 = \sqrt{1-\psi^2}\sin(J+c), \\ x_0 = \sqrt{1-\psi^2}\cos(J+c) \quad \text{mit} \quad (\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}}) = 1. \end{cases}$$

Ihre Krümmung berechnet sich zu

$$(51)\qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\psi^2(1-\mathfrak{K})^2}{1+\psi^2-\psi'^2}.$$

Für die Tangenteneinrichtungen der gesuchten Kurven erhält man

$$(52')\qquad \frac{dx_1}{dv} = \sqrt{1' - x_1^2 - w^2(x_1)},$$

$$(52'')\qquad \frac{dx_3}{dv} = \frac{-x_1 x_3 \sqrt{1-x_1^2-w^2}}{1-x_1^2} - \frac{w x_0}{1-x_1^2},$$

$$(52''')\qquad \frac{dx_0}{dv} = \frac{-x_1\sqrt{1-x_1^2-w^2}}{1-x_1^2}\,x_0 + \frac{w}{1-x_1^2}\,x_3 \quad \text{mit} \quad (\dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{x}}) = 1.$$

Für die inhomogenen Koordinaten der orthogonalen Trajektorien erhält man

$$Z = \frac{x_3}{x_0} = \operatorname{tg}\left(\int \sqrt{\frac{1-x_1^2-\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2}{1-x_1^2}}\,dv + c^*\right) = \operatorname{tg}(J+c^*),$$

$$X = \frac{x_1}{x_0} = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}\cos(J+c^*)},$$

und $x_1$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_1}{dv^2} = -\mathfrak{K}^* x_1$$

mit konstantem $\mathfrak{K}^*$. Um zu sehen, wie sich $\mathfrak{K}^*$ und $C^*$ aus $\mathfrak{K}$ und $C$ berechnen, muß man wieder für $\mathfrak{K} = 0$, $\mathfrak{K} > 0$ und $\mathfrak{K} < 0$ getrennt vorgehen.

Für $\mathfrak{K} = 0$ ist

$$\mathfrak{K}^* = +1, \quad C^* = 1 - c_1^2. \tag{53}$$

Die Rotationsflächen unter den Torsen sind also im elliptischen Raum die orthogonalen Flächen zu den Flächen mit euklidischer Maßbestimmung.

Für $\mathfrak{K} > 0$ ist

$$\mathfrak{K}^* = 1 - \mathfrak{K}. \tag{54}$$

Hier ist zu unterscheiden:

$$\mathfrak{K} > 1, \quad \text{dann ist} \quad \mathfrak{K}^* = -(\mathfrak{K} - 1) < 0, \quad C^* = \frac{1 - \mathfrak{K} - C^2}{\mathfrak{K} - 1},$$

$$\mathfrak{K} = 1, \quad \text{dann ist} \quad \mathfrak{K}^* = 0, \qquad c_1^{*2} = 1 - C^2,$$

$$\mathfrak{K} < 1, \quad \text{dann ist} \quad \mathfrak{K}^* = 1 - \mathfrak{K} > 0, \qquad c^{*2} = \frac{1 - \mathfrak{K} C^2}{1 - \mathfrak{K}}.$$

Für $\mathfrak{K} < 0$ ist

$$\mathfrak{K}^* = 1 + |\mathfrak{K}| > 0, \quad c^{*2} = \frac{1 - |\mathfrak{K}| C}{1 + |\mathfrak{K}|}. \tag{55}$$

Als Folgerung sieht man aus (52′), (52″), (52‴), daß die Rotationsfläche, die jede Einzelfläche der oben definierten Schar von Rotationsflächen konstanter Krümmung $\mathfrak{K}$ orthogonal schneidet, die konstante Krümmung $\mathfrak{K}^* = 1 - \mathfrak{K}$ hat.

Es sei noch bemerkt, daß man die Übertragung des Beltramischen Satzes für die hyperbolische und die elliptische Geometrie gemeinsam ausführen kann. Man kann nämlich von der in § 1 dieses Teils abgeleiteten Beziehung

$$\frac{g'}{\varkappa^2 + g^2} = \sqrt{\frac{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2}{\varkappa^2 (\varkappa^2 - \psi^2)^2}}$$

ausgehen und diese unter der Voraussetzung, $\varkappa^2$ sei eine beliebige Konstante, formal integrieren. Man erhält

$$\begin{cases} g(v) = \varkappa \operatorname{tg}\left(\int \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2}}{\varkappa^2 - \psi^2}\, dv + c\right) = \varkappa \operatorname{tg}(J + c), \\ f(v) = \frac{\psi}{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2}} \frac{\varkappa}{\cos(J + c)}. \end{cases} \tag{56}$$

Geht man von diesen Funktionen aus, so kann man auch weiterhin die Beweise für alle drei Geometrien gemeinsam führen. Es wurde bei dem Beweis des Beltramischen Satzes darauf verzichtet, weil der andere Weg anschaulicher schien.

## § 4. Ein Satz über die Polflächen der Rotationsflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung.

Jeder Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist in den nichteuklidischen Geometrien die Fläche der Flächennormalenpunkte $\mathfrak{y}$, also der Ort der Pole der Tangentenebenen der Fläche in bezug auf die absolute Fläche, zugeordnet. Diese Flächen $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$ sollen Polflächen von $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ heißen.

Satz 13: *Die Polflächen der Rotationsflächen konstanter Krümmung sind ebenfalls Rotationsflächen konstanter Krümmung, und zwar ist ihre totale relative Krümmung (das Produkt der Hauptkrümmungen)* $K^*_{t.r.}$ *gleich dem reziproken Wert der totalen relativen Krümmung* $K_{t.r.}$ *der Flächen* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, d. h.

$$K^*_{t.r.} = \frac{1}{\varkappa^4 K_{t.r.}}.$$

Beweis: Setzt man (56) in die Gleichung (25) der Rotationsflächen konstanter Krümmung ein, so erhält man

$$(57) \quad \begin{cases} x_1 = \psi(v)\cos u, & x_2 = \psi(v)\sin u, \\ x_3 = \sqrt{\varkappa^2 - \psi^2}\sin(J + c), & x_0 = \sqrt{\varkappa^2 - \psi^2}\cos(J + c), \end{cases}$$

wo

$$J = \int \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}}{\varkappa^2 - \psi^2}\, dv$$

ist. Außerdem weiß man, daß

$$E = \psi^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

ist. Die Koordinaten der Pole der Tangentenebenen von (57) sind gegeben durch

$$y_i = \frac{\partial}{\partial r_i}\left| \mathfrak{r}\ \mathfrak{x}\ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \right| \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Daraus bestimmt man die Koordinaten der Polflächen zu

$$(58) \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}\cos u, \\ y_2 = \sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}\sin u, \\ y_3 = \left(-\psi'\varkappa^2\cos(J + c) - \psi\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}\sin(J + c)\right)\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2}}, \\ y_0 = \left(\psi'\varkappa^2\sin(J + c) - \psi\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2\psi'^2}\cos(J + c)\right)\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2}}. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß die Polflächen Rotationsflächen sind; denn die Parameterlinien $v = \text{const}$ sind für alle drei Geometrien Kreise. Sie ergeben sich nämlich durch Drehung um die $Z$-Achse. Diese Rotation gehört aber den drei Bewegungsgruppen an.

Die Parameterlinien $u = \text{const}$ sind die Erzeugenden der Polflächen. Die totale relative Krümmung ist gegeben durch

$$K^*_{\text{t.r.}} = \frac{D^* D''^* - D'^{2*}}{E^* G^* - F^{*2}}.$$

Man muß also die ersten und zweiten Fundamentalgrößen der Polflächen bestimmen. Aus der Torseneigenschaft der Flächennormalen längs $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ der Polflächen kann man $F^* = D'^* = 0$ schließen. $E^*$ ist leicht aus (58) zu berechnen, da $\frac{\partial y_3}{\partial u} = \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0$ und $\frac{\partial y_1}{\partial u} = -y_2$, $\frac{\partial y_2}{\partial u} = y_1$ ist. Es ist $E^* = \varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2$. $G^*$ ist gegeben durch $\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right)$. Bedenkt man, daß $\mathfrak{y} = \mathfrak{n}$ ist, wo $\mathfrak{n}$ der Hauptnormalenpunkt der Erzeugenden der Flächen (57) ist, und daß $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\right) = G = 1$, also die Bogenlänge Parameter auf diesen Erzeugenden ist, so kann man die FRENETschen Formeln mit $\frac{1}{\tau} = 0$ anwenden, und es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v} = \dot{\mathfrak{n}} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathfrak{t}$$

und daher

$$G^* = \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) = \frac{\varkappa^2}{\varrho^2}.$$

Die Krümmung der Erzeugenden wurde für beide Geometrien zum Beweis des BELTRAMIschen Satzes berechnet, nämlich durch Formel (39) und (51). Also ist wegen $\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = K_{\text{r.t.}}$

$$G^* = \frac{\varkappa^4 \psi^2 \left(\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2}\right)^2}{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2} = \frac{\varkappa^4 \psi^2 K^2_{\text{r.t.}}}{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2}.$$

Um noch die Fundamentalgrößen $D^*$ und $D''^*$ zu erhalten, beachtet man, daß aus $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \left(\mathfrak{y} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\right) = \left(\mathfrak{y} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\right) = 0$ folgt $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \left(\mathfrak{x} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\right) = \left(\mathfrak{x} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right) = 0$, d. h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist wiederum die Polfläche von $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u, v)$. Betrachtet man nun die Formeln für die Fundamentalgrößen $D, D', D''$ für die Fläche (57), so sieht man aus $D = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}\right)$, $D'' = -\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}\right)$, daß sie völlig symmetrisch in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind. Vertauschen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ liefert aber die Fundamentalgrößen $D^*$ und $D''^*$. Also gilt

$$D = D^*, \quad D'^* = 0, \quad D''^* = D''.$$

Es folgt $K^*_{\text{t.r.}} = \frac{D^* D''^* - D'^{*2}}{E^* G^* - F^{*2}} \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2} \frac{1}{\varkappa^2} \frac{E\,G - F^2}{E^* G^* - F^{*2}}$.

Nun ist

$$\frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2} = K_{\text{t.r.}}, \quad E\,G - F^2 = \psi^2, \quad E^* G^* - F^{*2} = \varkappa^4 \psi^2 K^2_{\text{t.r.}}.$$

Setzt man alles ein, so folgt

$$K^*_{\text{t.r.}} = \frac{1}{\varkappa^4 K_{\text{t.r.}}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für die hyperbolische Geometrie weiß man, daß die Polfläche ganz im Äußern des Absoluten liegen muß, wenn die Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ nur reale Punkte hat. Dann schneiden sich Fläche und Polfläche auf dem Absoluten oder gar nicht. In der elliptischen Geometrie sind die Polflächen real. In der euklidischen Geometrie hat dieser Satz keinen Sinn, da alle Pole im Unendlichen liegen und die Polflächen mit der unendlich fernen Ebene des euklidischen Raums zusammenfallen. Für die GAUSSschen Krümmungen erhält man nach einer kleinen Umrechnung

$$\mathfrak{K}^* = \frac{-\frac{1}{\varkappa^2}\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2}}. \tag{59}$$

## § 5. Diskussion der Rotationsflächen konstanter Krümmung, deren Integral $J$ elementar auszuführen ist.

I. Hyperbolische Geometrie. Die Erzeugenden der Rotationsflächen konstanter Krümmung hängen im wesentlichen von dem Integral

$$J = \int \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \psi^2 - \varkappa^2 \psi'^2}}{\psi'(\varkappa^2 - \psi^2)\varkappa}\, d\psi \tag{60}$$

ab, wie man aus den Gleichungen (26) bis (29) entnehmen kann. Man wählt vorteilhaft die Integrationskonstante immer gleich Null, da eine Veränderung der Integrationskonstanten nur eine Bewegung der Fläche im Raum bedeutet. Man kann aus (60) sofort schließen, daß für die elliptische und die hyperbolische Geometrie die Zahl der elementar integrablen Fälle viel größer ist als für die euklidische Geometrie, da (60) für $\frac{1}{\varkappa^2} = 0$ in das einfachere Integral $J = \int \frac{\sqrt{1 - \psi'^2}}{\psi'}\, d\psi$ übergeht.

Betrachtet man die Erzeugenden der Rotationsflächen in der Ebene $Y = 0$, so schreibt sich ihre Parameterdarstellung in rechtwinkligen inhomogenen Koordinaten für die hyperbolische Geometrie

$$\begin{cases} Z = g(\psi) = \mathfrak{Tg}\left(\int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - \psi'^2}}{\psi'(1 + \psi^2)}\, d\psi\right) = \mathfrak{Tg}\, J, \\ X = f(\psi) = \frac{\psi}{\sqrt{1 + \psi^2}}\, \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, J}. \end{cases} \tag{61}$$

Wichtig ist die Bestimmung der Schnittpunkte der Erzeugenden mit der absoluten Fläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Für $Y = 0$ geht dies über in $X^2 + Z^2 = 1$. Setzt man (61) ein, so folgt

$$\mathfrak{Tg}^2 J + \frac{\psi^2}{1 + \psi^2}\, \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 J} = 1.$$

Diese Beziehung ist nur für $J \to \infty$ oder $\psi \to \infty$ möglich. Weitere Untersuchungen gehen getrennt.

Im Fall $\mathfrak{K} = 0$ ist $\psi' = c_1$. Für $c_1 = 0$ kann man $\psi$ nicht als Parameter auf der Fläche einführen. Ist $\psi' = 0$, so ist

$$J = \frac{1}{\sqrt{1 + c_2^2}} v,$$

und die Gleichung der Erzeugenden ist

$$\frac{1 + c_2^2}{c_2^2} X^2 + Z^2 = 1.$$

Das sind Ellipsen, die das absolute Gebilde in $Z = \pm 1$ berühren. Die Flächen sind singularitätenfrei. Wickelt man sie auf die euklidische Ebene ab, so gehen die Erzeugenden als geodätische Linien der Fläche in Geraden über, die sich im Unendlichen schneiden, also parallel sind. Die orthogonalen Trajektorien dieser Geraden sind ebenfalls ein Büschel von parallelen Geraden. (Dies ist der einzige Fall, wo die Meridiane $u = \text{const}$ nicht nur konstante geodätische Krümmung haben, sondern wo sogar $\frac{1}{\varrho_g} = 0$ gilt und sie geodätische Linien der Fläche sind.) Diese Raumform der euklidischen Geometrie ist die des euklidischen Zylinders.

Für $c_1 \neq 0$ erhält man das Integral

$$J = \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - c_1^2}}{c_1 (1 + \psi^2)} d\psi,$$

das stets elementar integrabel ist. Für $c_1^2 = 1$ ergeben sich Grenzkugeln. Denn aus dem Ausdruck (39) für die Krümmung der ebenen Krümmungslinien $u = \text{const}$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\psi^2 (\mathfrak{K} + 1)^2}{1 + \psi^2 - \psi'^2}$$

folgt für $\psi'^2 = 1$, daß $\frac{1}{\varrho^2}$ konstant und gleich der totalen relativen Krümmung der Fläche ist. Die Gleichungen der Erzeugenden dieser Grenzkugeln sind $X^2 + 2(Z \pm \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

Es sind Ellipsen, die das absolute Gebilde in $Z = +1$ oder $Z = -1$ berühren. LINDEMANN hat gezeigt, daß man auf diesen singularitätenfreien Flächen die euklidische Geometrie in ihrer Gesamtausdehnung treiben kann. Für $c_1 \neq 0$ ergibt sich

$$J = \frac{1}{c_1} \log\left(\psi \pm \sqrt{1 - c_1^2 + \psi^2}\right) \pm \frac{1}{2} \log \frac{c_1^2 - \frac{1 + c_1^2}{2}(1 + \psi^2) \pm c_1 \psi \sqrt{1 + \psi^2 - c_1^2}}{1 + \psi^2}.$$

Die Flächen berühren das absolute Gebilde in $Z = 1$, $X = 0$. Ist $1 - c_1^2 > 0$, so schneiden die Erzeugenden noch einmal die $Z$-Achse

unter einem Winkel $\delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$. Dieser Punkt ist ein singulärer Punkt der Fläche. Ist $1 - c_1^2 < 0$, so haben die Flächen Rückkehrkanten für $\psi^2 = c_1^2 - 1$; denn für diesen Parameterwert berühren sie eine Parallele zur $X$-Achse.

Wickelt man die Grenzkugel auf die euklidische Ebene ab, so bilden die Linien $u = \text{const}$ ein Geradenbüschel, der Punkt $P$ geht also in $P^*$ über, die Linien $v = \text{const}$ gehen in Kreise über, deren Mittelpunkt $P^*$ ist. Die Flächen mit $1 - c_1^2 > 0$ und $1 - c_1^2 < 0$ lassen sich auf den euklidischen Kegel abwickeln. Die eine Flächenart überdeckt den Kegel ganz, die andere nur von einem Meridian, auf den die Rückkehrkante fällt, bis ins Unendliche.

Im Fall $\mathfrak{K} > 0$ ist $\psi'^2 = \mathfrak{K}(C^2 - \psi^2)$ und

$$J = \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - \mathfrak{K}(C^2 - \psi^2)}}{\sqrt{\mathfrak{K}}\sqrt{C^2 - \psi^2}\,(1 + \psi^2)}\, d\psi .$$

Im allgemeinen ist dieses Integral elliptisch; elementar ist es nur für $C^2\mathfrak{K} = 1$. Benützt man (39) für die Krümmung der Erzeugenden und berechnet daraus $\psi'^2$ für $\varrho^2 = \text{const}$, so erhält man

$$\psi'^2 = 1 + \psi^2(1 - (\mathfrak{K} + 1)^2 \varrho^2).$$

Durch Vergleich mit $\psi'^2 = \mathfrak{K}(C^2 - \psi^2)$ folgt daraus $C^2\mathfrak{K} = 1$ und $\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{K} + 1$. Nun ist aber $\mathfrak{K} + 1$ die totale relative Krümmung, also das Produkt der Hauptkrümmungen. Damit ist gezeigt, daß Kugeln mit elliptischer Maßbestimmung vorliegen, die mit dem absoluten Gebilde keinen Punkt gemein haben. Die Gleichungen ihrer Erzeugenden sind

$$X^2 + Z^2 = r^2 \quad \text{mit} \quad r = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathfrak{K}}}.$$

Damit hat man jetzt die Kugeln gefunden, die sowohl im hyperbolischen wie im euklidischen Raum konstante Krümmung haben, und zwar besteht zwischen den GAUSSschen Krümmungen $K = \frac{1}{r^2}$ und $\mathfrak{K}$ die Beziehung $K = 1 + \mathfrak{K}$. Man sieht hier auch sehr schön, daß dieser Zusammenhang nicht invariant bleibt gegenüber den Bewegungen: Denn verschiebt man z. B. die Kugel längs der $X$-Achse, so bleibt sie zwar für die euklidische Geometrie eine Kugel, aber nicht für die hyperbolische Geometrie.

Im Fall $\mathfrak{K} < 0$ ist $\psi'^2 = |\mathfrak{K}|(\psi^2 - C)$ und

$$J = \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - |\mathfrak{K}|(C + \psi)^2}}{\sqrt{|\mathfrak{K}|}\sqrt{C^2 + \psi^2}\,(1 + \psi^2)}\, d\psi .$$

Im allgemeinen ist dieses Integral elliptisch, für $\mathfrak{K} = -1$, $C = 1$, $C = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}$ und $C = 0$ ist das Integral jedoch elementar lösbar.

Für $\mathfrak{K} = -1$ sind die Erzeugenden Geraden; denn nach den Betrachtungen im ersten Teil müssen hier die Rotationsflächen unter den Torsen vorliegen:

$$aZ = bX + d \quad \text{mit} \quad C = \frac{a^2 - d^2}{a^2 - d^2 + b^2}.$$

Für $C > 0$ liegt die Spitze des Kegels innerhalb, für $C < 0$ außerhalb des absoluten Gebildes, für $C = 0$ auf dem absoluten Gebilde. Für $C = 1$ hat man die Ebenen. Die Abwicklung der Kegel wurde im ersten Teil ausgeführt.

Für $C = 1$ ist die Parameterdarstellung der Erzeugenden mit arc tg $\psi = \omega$ gegeben durch

$$Z = \mathfrak{Tg}\left(\omega \sqrt{\frac{1}{|\mathfrak{K}|} - 1}\right), \quad X = \sin\omega \frac{1}{\mathfrak{Cof}\left(\omega \sqrt{\frac{1}{|\mathfrak{K}|} - 1}\right)}.$$

Diese Flächen schneiden das absolute Gebilde für $\omega = \frac{\pi}{2}$ in einem Kreis. Im Punkte $X = 0$, $Z = 0$ haben sie eine singuläre Stelle; denn ihr Winkel mit der $X$-Achse ist von Null verschieden. Nur für $|\mathfrak{K}| = 1$ ist die Fläche ohne Singularitäten, das ist die Ebene $Z = 0$.

Für $C = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}$ erhält man

$$J = \int \frac{\psi \sqrt{1 - |\mathfrak{K}|}}{\sqrt{1 + |\mathfrak{K}| \psi^2 (1 + \psi^2)}} d\psi.$$

Aus (39) folgt für $\varrho^2 = \text{const}$ und $\mathfrak{K} < 0$

$$\psi'^2 = 1 + \psi^2 (1 - (1 - |\mathfrak{K}|)^2 \varrho^2).$$

Aus dem Vergleich mit $\psi'^2 = |\mathfrak{K}| (C + \psi^2)$ folgt $C = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}$ und $\frac{1}{\varrho^2} = 1 - |\mathfrak{K}|$. Die Flächen sind Überkugeln, die das absolute Gebilde längs eines Kreises berühren. Die Gleichungen der Erzeugenden, also der Überkreise, sind

$$X^2 + \varrho^2 Z^2 = 1 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\varrho^2} = 1 - |\mathfrak{K}|.$$

Euklidisch betrachtet sind dies Ellipsen, deren große Achse so groß ist wie der Radius des Absoluten.

Für $C = 0$ ist $$J = \int \frac{\sqrt{1 + \psi^2 - |\mathfrak{K}| \psi^2}}{\sqrt{|\mathfrak{K}| \psi (1 + \psi^2)}} d\psi.$$

Die Gleichung der Erzeugenden wird für $|\mathfrak{K}| < 1$

$$X = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\varphi\, \mathfrak{Cof} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi - \sqrt{|\mathfrak{K}|}\, \mathfrak{Sin} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi\, \mathfrak{Sin}\,\varphi},$$

$$Z = X \left(\sqrt{|\mathfrak{K}|}\, \mathfrak{Cof}\,\varphi\, \mathfrak{Sin} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi\, \mathfrak{Cof} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi\right),$$

für $|\mathfrak{K}| > 1$

$$X = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{K}|}\, \mathfrak{Cof}\,\varphi\, \mathfrak{Cof} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi - \mathfrak{Sin}\,\varphi\, \mathfrak{Sin} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi},$$

$$Z = X \left(\mathfrak{Cof}\,\varphi\, \mathfrak{Sin} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi - \sqrt{|\mathfrak{K}|}\, \mathfrak{Sin}\,\varphi\, \mathfrak{Cof} \sqrt{|\mathfrak{K}|}\,\varphi\right).$$

Alle Flächen schneiden das absolute Gebilde in $Z = 1$, $X = 0$. Die Flächen mit $|\mathfrak{K}| < 1$ berühren es dann noch längs des Kreises $X^2 + Y^2 = 1$. Diese Flächen sind ohne Singularitäten, während die Flächen mit $|\mathfrak{K}| > 1$ eine Rückkehrkante für $\psi^2 = \frac{1}{|\mathfrak{K}| - 1}$ haben. Dann berühren diese die Ebene $Z = 0$ längs eines Kreises.

Nun sollen die Bilder der Rotationsflächen konstanter Krümmung, bei denen das Integral elementar auszuführen ist, im (POINCARÉschen) Halbraum beschrieben und eine Anwendung des BELTRAMIschen Satzes gegeben werden.

In Anlehnung an Betrachtungen von LINDEMANN kann man folgende Transformation des POINCARÉschen Modells in das projektive Modell der hyperbolischen Geometrie mit dem absoluten Gebilde

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0$$

ableiten. $x, y, z$ seien rechtwinklige Koordinaten im POINCARÉschen Modell. Das absolute Gebilde ist dann die Ebene $z = 0$. Dann lautet die Transformation

$$(62)\quad x_1 = \frac{x}{z},\quad x_2 = \frac{y}{z},\quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2z},\quad x_0 = i\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2z} = i\bar{x}_0$$

mit der Normierung $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = -1$. Für Punkte des absoluten Gebildes lautet die Transformation

$$x_1 = 2x,\quad x_2 = 2y,\quad x_3 = x^2 + y^2 - 1,\quad x_0 = i(x^2 + y^2 + 1),\quad z = 0.$$

Man muß zeigen, daß bei dieser Transformation die Ebenen des projektiven Modells in Orthogonalkugeln zur Ebene $z = 0$ übergehen. Die Gleichung der Ebene ist in den laufenden Koordinaten $x_1, x_2, x_3, x_0$ gegeben durch

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + \bar{u}_0 \bar{x}_0 = 0.$$

Setzt man dort (62) ein, so erhält man die Gleichung von Orthogonalkugeln zur Ebene $z = 0$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = R^2.$$

Man kann nun zeigen, daß durch die Transformation (62) die Rotationsflächen konstanter Krümmung in solche Flächen übergehen, die auch von der euklidischen Geometrie her betrachtet Rotationsflächen sind. Für die hyperbolische Geometrie bleiben sie selbstverständlich Rotationsflächen. Die Gleichung der Rotationsflächen konstanter Krümmung ist in projektiven Koordinaten durch (57) gegeben.

Führt man die Transformation (62) aus, so folgt mit $C = e^c$

$$(63)\qquad \begin{cases} x = C\,\dfrac{\psi e^J}{\sqrt{1+\psi^2}}\cos u, \\ y = C\,\dfrac{\psi e^J}{\sqrt{1+\psi^2}}\sin u, \\ z = C\,\dfrac{\psi e^J}{\sqrt{1+\psi^2}}. \end{cases}$$

Dies sind sowohl im hyperbolischen wie im euklidischen Sinn Rotationsflächen um die $z$-Achse. Man sieht, daß der hyperbolischen Bewegung $J^* = J + c$ im POINCARÉschen Modell einfach die Ähnlichkeitstransformation

$$x^* = C\,x, \quad y^* = C\,y, \quad z^* = C\,z$$

entspricht. Nun werden die Bilder der eigentlichen Kugeln, der Grenz- und Überkugeln bestimmt. Für alle drei Kugelarten lautet die Kugelgleichung

$$\cos^2\frac{r}{\varkappa}\,\varkappa^4 - (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 = 0.$$

Setzt man die Konstante $\cos^2\frac{r}{\varkappa}\,\varkappa^4 = m^2$, so ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = m$ zu transformieren. Führt man dies durch, so erhält man

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-mc)^2 = R^2.$$

Da die eigentlichen Kugeln $\mathfrak{K} > 0$ keinen Punkt mit dem absoluten Gebilde gemeinsam haben, so müssen diese in solche Kugeln übergehen, die mit der Ebene $z = 0$ keinen Punkt gemein haben; für sie gilt also $mc > R$. Die Grenzkugeln berühren das absolute Gebilde in einem Punkt, müssen also im POINCARÉschen Modell solche Kugeln sein, die die Ebene $z = 0$ berühren, also $mc = R$, oder Ebenen parallel zur Ebene $z = 0$ sein. Die Überkugeln berühren das absolute Gebilde längs eines Kreises. Also gehen sie in Kugeln über, für die $mc < R$ gilt.

Man kann auch sofort die Bilder der Kegel angeben. Die Erzeugenden der Kegel sind Geraden. Die Erzeugenden gehen wieder in Erzeugende über, wie (63) zeigt. Die Geraden gehen in Orthogonalkreise zu $z = 0$ über. Also entstehen die Bilder der Kegel durch Rotation eines solchen Kreises um die $z$-Achse.

Die Kegel sind hier also ringartige Gebilde oder Zylinder. Da die Winkelmessung im Halbraum euklidisch ist, kann man jetzt leicht die Trajektorien zu den Kugel- und Kegelscharen, die durch die Transformation $x^* = C\,x$, $y^* = C\,y$, $z^* = C\,z$ aus einer Kugel bzw. einem Kegel hervorgehen, bestimmen. Aus der Übertragung des

Satzes von BELTRAMI findet man nach (47) über die Zuordnung der Krümmung und der Konstanten, daß die Flächen mit $C = 0$ und $\mathfrak{K} < 0$ die orthogonalen Trajektorien zu den eigentlichen, Grenz- und Überkugeln sind.

Die Flächen mit $\mathfrak{K} = 0$ sind die orthogonalen Trajektorien zu den Kegeln.

Für die Erzeugenden der Rotationsflächen konstanter Krümmung, deren $J$ elementar auszuführen ist, besteht ein einfacher Zusammenhang. Die Erzeugenden der Kegel und Kugeln gehen durch eine Vertauschung der $x$-Achse und $z$-Achse ineinander über. Die Erzeugenden (nicht die Flächen) mit $C = 0$ entstehen genau wie die Erzeugenden der Flächen mit $\mathfrak{K} = 0$, nur die $z$-Achse ist mit der $x$-Achse vertauscht. Die entstehenden Rotationsflächen sind natürlich verschieden; denn es wird immer um die $z$-Achse gedreht.

Alle integrablen Fälle ergeben sich mit einer Ausnahme ($\mathfrak{K} < 0$, $C = 1$) im POINCARÉschen Modell als Rotationsflächen, deren Erzeugende euklidisch gesprochen Kreise sind, oder als Rotationsflächen, deren Erzeugende die orthogonalen Trajektorien zu Kreisscharen sind. Diese Kreisscharen gehen durch Vertauschung der $x$-Achse und $z$-Achse auseinander hervor. Berechnet man die orthogonalen Trajektorien zu den Kreisscharen, so wird man auf eine LAGRANGEsche Differentialgleichung geführt, die sich immer lösen läßt. Nur die Flächen mit $\mathfrak{K} < 0$ und $C = 1$ bilden eine Ausnahme von den integrablen Fällen; denn die orthogonale Fläche zu einer Fläche mit $\mathfrak{K} < 0$ und $C = 1$ ist wieder eine Fläche dieser Art mit $\mathfrak{K}^* = -(1 - |\mathfrak{K}|)$ und $C^* = 1$.

II. Elliptische Geometrie. Betrachtet man die Erzeugenden der Rotationsflächen konstanter Krümmung im elliptischen Raum, so schreibt sich ihre Parameterdarstellung in rechtwinkligen inhomogenen Koordinaten in der Ebene $Y = 0$

$$(64) \qquad \begin{cases} Z = g(\psi) = \operatorname{tg}\left(\int \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{\psi'(1-\psi^2)}\, d\psi\right) = \operatorname{tg} J, \\ X = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} \frac{1}{\cos J}. \end{cases}$$

Im Fall $\mathfrak{K} = 0$ ist $\psi' = c_1$. Für $c_1 = 0$ und $\psi = c_2$ kann man $\psi$ nicht als Parameter auf der Fläche einführen. Die Gleichung der Erzeugenden lautet

$$\frac{1 - c_2^2}{c_2^2} X^2 - Z^2 = 1.$$

Das sind die Erzeugenden der CLIFFORDschen Flächen mit euklidischer Maßbestimmung im elliptischen Raum.

Ist $\psi' \neq 0$, so ist $$J = \int \frac{\sqrt{1-\psi^2-c_1^2}}{c_1(1-\psi^2)}\, d\psi .$$

Dieses Integral ist immer elementar zu lösen und ergibt

$$J = \frac{1}{c_1} \arcsin \frac{\psi}{\sqrt{1-c_1^2}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\psi c_1 \sqrt{1-c_1^2-\psi^2}}{(1-\psi^2)(1-c_1^2)}.$$

Die Erzeugenden sind die orthogonalen Trajektorien zu den Torsen. Diese Flächen haben im Nullpunkt eine Singularität, eine Spitze, laufen von dieser Spitze kegelähnlich ab, schneiden die Ebene $x_0 = 0$ und haben für $\psi^2 = 1 - c_1^2$ eine Rückkehrkante. Man kann sie auf den euklidischen Kegel abwickeln. Sie bedecken ihn dann von der Spitze bis zu einem Meridian, in den die Rückkehrkante übergeht.

Im Fall $\mathfrak{K} > 0$ ist $\psi'^2 = \mathfrak{K}(C^2 - \psi^2)$ und

$$J = \int \frac{\sqrt{1-\psi^2-\mathfrak{K}(C^2-\psi^2)}}{\sqrt{\mathfrak{K}}\sqrt{C^2-\psi^2}\,(1-\psi^2)}\, d\psi .$$

Im allgemeinen ist dieses Integral elliptisch; elementar ist es für $\mathfrak{K} = 1$, $C^2\mathfrak{K} = 1$ und $C^2 = 1$.

Für $\mathfrak{K} = 1$ sind die Erzeugenden Geraden. Das folgt aus den Betrachtungen des ersten Teils. Es liegen die Rotationsflächen unter den Torsen vor: Ebenen und Rotationskegel. Die Gleichung der Erzeugenden ist

$$aZ = bX + d \quad \text{mit} \quad C^2 = \frac{a^2+d^2}{a^2+b^2+d^2}.$$

Für $C^2 = 1$ erhält man die Ebenen.

Für $C^2\mathfrak{K} = 1$ ist $$J = \int \frac{\psi\sqrt{\mathfrak{K}-1}}{\sqrt{1-\mathfrak{K}\psi^2}\,(1-\psi^2)}\, d\psi .$$

Aus dem Ausdruck für die Krümmung der ebenen Krümmungslinien $u = \text{const}$ folgt für $\varrho^2 = \text{const}$

$$\psi'^2 = 1 - \psi^2(1 + \varrho^2(\mathfrak{K}-1)^2).$$

Aus dem Vergleich mit $\psi'^2 = \mathfrak{K}(C^2 - \psi^2)$ ergeben sich die Beziehungen $C^2\mathfrak{K} = 1$ und $\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{K} - 1$, also das Produkt der Hauptkrümmungen. Die Flächen sind also Kugeln mit dem Radius $\varrho^2 = \frac{1}{\mathfrak{K}-1}$, die Gleichung der Erzeugenden lautet

$$\frac{Z^2}{\mathfrak{K}-1} - X^2 = 1.$$

Die Gaußsche Krümmung der Kugeln im elliptischen Raum ist also stets größer als 1. Die Flächen mit der Krümmung $0 < \mathfrak{K} < 1$ ergeben sich elementar für $C^2 = 1$.

Für $C^2 = 1$ ist $J = \int \frac{\sqrt{1-\Re}}{\sqrt{\Re}\,(1-\psi^2)}\,d\psi$, und die Parameterdarstellung der Erzeugenden lautet mit $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\psi = \omega$

$$X = \mathfrak{Sin}\,\omega \frac{1}{\cos\left(\omega\sqrt{\frac{1}{\Re}-1}\right)}, \quad Z = \mathfrak{Tg}\left(\omega\sqrt{\frac{1}{\Re}-1}\right).$$

Im Punkte $X = 0, Z = 0$ haben diese Flächen eine singuläre Stelle; denn sie schneiden die $x$-Achse in der Richtung $\frac{1}{\sqrt{\Re}}$. Für $\omega\sqrt{\frac{1}{\Re}-1} = \frac{2n+1}{2}\pi$ schneiden sie die $x$-Achse und für $\omega\sqrt{\frac{1}{\Re}-1} = n\pi$ die Gerade $x_0 = 0$ und haben keine weiteren Singularitäten.

Im Fall $\Re < 0$ ist $\psi'^2 = |\Re|(\psi^2 + C)$ und

$$J = \int \frac{\sqrt{1-\psi^2-|\Re|(\psi^2+C)}}{\sqrt{|\Re|}\sqrt{\psi^2+C}\,(1-\psi^2)}\,d\psi.$$

Im allgemeinen ist dieses Integral elliptisch; elementar ist es nur für $C = 0$. Diese Flächen sind orthogonal zu den oben bestimmten Kugeln. Die Parameterdarstellung der Erzeugenden dieser Rotationsflächen konstanter Krümmung im elliptischen Raum lautet

$$X = \frac{1}{\sqrt{|\Re|}\,\mathfrak{Cof}\,(\sqrt{|\Re|}\,\varphi)\cos\varphi + \mathfrak{Sin}\,(\sqrt{|\Re|}\,\varphi)\sin\varphi}$$

$$Z = X\left[\mathfrak{Sin}\,(\sqrt{|\Re|}\,\varphi)\cos\varphi - \sqrt{|\Re|}\,\mathfrak{Cof}\,(\sqrt{|\Re|}\,\varphi)\sin\varphi\right].$$

Sie haben eine Rückkehrkante bei $Z = 0$ und $X = \frac{1}{\sqrt{|\Re|}}$, dann aber verlaufen sie singularitätenfrei hyperbelartig über die Gerade $x_0 = 0$ hin. Dabei schmiegen sich die unendlich vielen Kurvenäste mit wachsendem $\varphi$ immer mehr an die Ebene $X = 0$ an. Wickelt man die Fläche mit $|\Re| = 1$ auf den Kegel mit $|\Re| = 1$ und $C = 0$, dessen Spitze auf dem absoluten Gebilde im hyperbolischen Raum liegt, ab, so ist dieser von einem Meridian bis zum Schnitt mit dem Absoluten bedeckt. Man hat also keine Raumform der ebenen hyperbolischen Geometrie im elliptischen Raum gefunden.

Aus den Gleichungen der Erzeugenden von Rotationsflächen konstanter Krümmung kann man schließen, daß sowohl im elliptischen wie im hyperbolischen Raum die Rotationsfläche der Traktrix keine konstante Krümmung hat.

## Dritter Teil.

## Übertragung des Hilbertschen Satzes über die Flächen negativ konstanter Gaußscher Krümmung.

### § 1. Das Bild einer Raumkurve.

Als Bild eines Punktes $\mathfrak{w}: (w_1, w_2, w_3, w_0)$ mit $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}) = \varkappa^2$ des nichteuklidischen Raumes wurde stets der Punkt $\mathfrak{W}$ mit den rechtwinkligen Parallelkoordinaten $\frac{w_1}{w_0}, \frac{w_2}{w_0}, \frac{w_3}{w_0}$ mit $w_0 = \frac{1}{\varkappa} w_0$ betrachtet.

Das Bild des absoluten Gebildes der hyperbolischen Geometrie ist dann die Einheitskugel, während das Bild des absoluten Gebildes $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = 0$ der elliptischen Geometrie keinen realen Punkt besitzt.

Als Bild einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}) = \varkappa^2$, $(\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 1$ und mit den Koordinaten $(x_1(s), x_2(s), x_3(s), x_0(s))$ (eine ebene Kurve ist gegeben durch $x_3(s) \equiv 0$) ergibt sich die Kurve $\mathfrak{X}(s)$ mit den rechtwinkligen Parallelkoordinaten $\frac{x_1(s)}{\frac{1}{\varkappa} x_0(s)}, \frac{x_2(s)}{\frac{1}{\varkappa} x_0(s)}, \frac{x_3(s)}{\frac{1}{\varkappa} x_0(s)}$. Um nun das Bild des begleitenden Polartetraeders mit den Ecken $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ in bezug auf das absolute Gebilde zu bestimmen, ist es empfehlenswert, den Zusammenhang des Bildes dieses Polartetraeders mit dem euklidischen Dreibein $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3$ der Kurve $\mathfrak{X}(s)$ zu untersuchen.

Der Tangentenvektor der Kurve $\mathfrak{X}(s)$ ist gegeben durch $\dot{\mathfrak{X}}(s)$ (der Punkt bedeutet hier nicht Ableitung nach der Bogenlänge von $\mathfrak{X}(s)$, sondern nach der Bogenlänge von $\mathfrak{x}(s)$). Das Bild der Tangente der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ wird durch die Gerade geliefert, die von den Bildpunkten $\mathfrak{x}_B$ und $\dot{\mathfrak{x}}_B$ der Punkte $\mathfrak{x}(s)$ und $\dot{\mathfrak{x}}(s)$ bestimmt ist. $\dot{\mathfrak{x}}_B$ liegt dabei auf der Polarebene zu $\mathfrak{x}_B$ in bezug auf die Einheitskugel. Es gilt

Satz 14: *Das Bild der Tangente ist die (euklidische) Tangente des Bildes.*

Beweis: (Vgl. Abb. 1.) Es ist zu zeigen, daß

$$\dot{\mathfrak{x}}_B(s_0) - \mathfrak{x}_B(s_0) = \lambda\, \dot{\mathfrak{X}}(s_0)$$

ist. Nun ist

$$\mathfrak{X}(s) = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu}{x_0} \mathfrak{e}_\nu \quad \text{mit} \quad (\mathfrak{e}_\lambda \mathfrak{e}_\mu) = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \mu, \\ 0 \text{ für } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

und

$$\dot{\mathfrak{X}}(s) = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\dot{x}_\nu x_0 - \dot{x}_0 x_\nu}{x_0^2} \mathfrak{e}_\nu.$$

Nach Definition ist

$$\mathfrak{x}_B(s) = \mathfrak{X}(s) \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{x}}_B(s) = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\dot{x}_\nu}{\dot{x}_0} e_\nu .$$

Daher folgt

$$\dot{\mathfrak{x}}_B(s_0) - \mathfrak{x}_B(s_0) = \sum_{\nu=1}^{3} \left( \frac{\dot{x}_\nu}{\dot{x}_0} - \frac{x_\nu}{x_0} \right) e_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\dot{x}_\nu x_0 - \dot{x}_0 x_\nu}{x_0 \dot{x}_0} = \frac{x_0(s_0)}{\dot{x}_0(s_0)} \dot{\mathfrak{X}}(s_0) .$$

Als Anwendung kann man für das Bild der ebenen Kurve ($x_3(s) \equiv 0$) das Bild des begleitenden Polardreiecks bestimmen. Man berechne im Punkte $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(s_0)$ den euklidischen Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{X}}(s_0)$, konstruiere

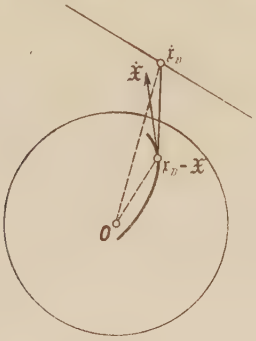


Abb. 1.

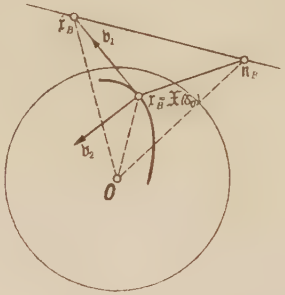


Abb. 2.

die Polare von $\mathfrak{X}(s_0)$ in bezug auf den Einheitskreis. Der Schnittpunkt der Polaren mit der Tangente ist das Bild von $\dot{\mathfrak{x}}(s_0)$. Man konstruiere dann den Pol der Tangente in bezug auf das absolute Gebilde. Dieser ist das Bild $\mathfrak{n}_B(s_0)$ des Normalenpunktes $\mathfrak{n}(s_0)$. Das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathfrak{X}(s_0) = \mathfrak{x}_B$, $\dot{\mathfrak{x}}_B(s_0)$ und $\mathfrak{n}_B(s_0)$ ist das Bild des begleitenden Polardreiecks. Im allgemeinen ist der Vektor $\mathfrak{n}_B - \mathfrak{x}_B$ linear unabhängig von $\mathfrak{b}_2$ (vgl. Abb. 2).

### § 2. Eine Anwendung auf die Tangentenfläche.

Betrachtet man nun das Bild der Tangentenfläche der Kurve $\mathfrak{x}(s)$,

$$\mathfrak{z}(s, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{\varkappa} \mathfrak{x}(s) + \varkappa \sin \frac{\varphi}{\varkappa} \dot{\mathfrak{x}}(s) ,$$

so folgt aus Satz (14), daß sie die euklidische Tangentenfläche der Bildkurve $\mathfrak{X}(s)$ ist. Die Rückkehrkante der Bildfläche ist also die Bildkurve $\mathfrak{X}(s)$. In der elliptischen Geometrie sind alle Punkte der projektiven Ebene reale Punkte. Daher definiert die Tangentenfläche einer Raumkurve (die Tangentenflächen haben nach den Ergebnissen des ersten Teiles die Krümmung des umgebenden Raumes) keine singularitätenfreie Raumform der elliptischen Geometrie. In der hyperbolischen Geometrie definiert die Tangentenfläche einer Raumkurve

dann eine singularitätenfreie Raumform von unendlicher Ausdehnung, wenn die Rückkehrkante $\mathfrak{x}(s)$ ganz im Äußeren des absoluten Gebildes liegt und die Fläche das absolute Gebilde durchdringt. Außerdem kann man jeder realen Raumkurve, die also ganz im Inneren liegt, eine Polkurve, die ganz im Äußeren liegt, zuordnen. Durchdringt die Tangentenfläche dieser Polkurve das absolute Gebilde, so definiert sie eine reguläre Raumform von unendlicher Ausdehnung der ebenen hyperbolischen Geometrie.

Durch eine weitere Betrachtung der Tangentenflächen soll jetzt ein Satz über die Schmiegebenen einer Raumkurve abgeleitet werden.

Es wurde in Satz 5 bewiesen, daß in allen drei Geometrien die Tangentenfläche die Einhüllende der Schmiegebenen der Kurve ist. Da nun einmal die euklidische Tangentenfläche von $\mathfrak{X}(s)$ die Einhüllende der euklidischen Schmiegebenen $\{\mathfrak{X}(s), \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2\}$ ist, andererseits als Bild der Tangentenfläche $\mathfrak{x}(s)$ die Einhüllende der Bilder der Schmiegebenen, so folgt

Satz 15: *Das Bild der Schmiegebene ist die euklidische Schmiegebene des Bildes.*

Diesen Satz kann man auch direkt beweisen, indem man zeigt, daß das Bild des Normalenpunktes in der Schmiegebene $\{\mathfrak{X}(s), \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2\}$ liegt. Es fallen im allgemeinen die Bilder der rektifizierenden Ebenen und der Normalebenen der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ mit den rektifizierenden Ebenen und den Normalebenen der im euklidischen Raum betrachteten Bildkurve $\mathfrak{X}(s)$ nicht zusammen. Der Grund ist darin zu sehen, daß die Bestimmung dieser Ebenen wesentlich von dem absoluten Gebilde der zugehörigen Geometrie abhängig ist.

Man ist jetzt in der Lage, in jedem Punkt der Bildkurve das begleitende Polartetraeder mit Hilfe des euklidischen Dreibeins der Bildkurve zu konstruieren. Man bestimme den euklidischen Tangentenvektor $\mathfrak{v}_1$ der Bildkurve $\mathfrak{X}(s)$ im Punkte $\mathfrak{X}(s_0)$, konstruiere die Polarebene des Punktes $\mathfrak{X}(s_0)$ in bezug auf die Einheitskugel. In dieser Ebene liegen die Punkte $\mathfrak{n}_B$, $\mathfrak{t}_B$ und $\mathfrak{b}_B$. Ihr Schnittpunkt mit der Tangente ist das Bild $\mathfrak{t}_B$ des Tangentenpunktes $\mathfrak{t}(s_0)$. Dann berechne man den euklidischen Hauptnormalenvektor $\mathfrak{v}_2$ von $\mathfrak{X}(s)$ und lege die Schmiegebene an die Kurve $\mathfrak{X}(s)$ und konstruiere den Pol dieser Ebene

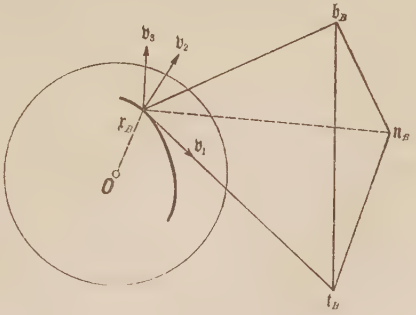

Abb. 3.

in bezug auf die Einheitskugel. Dieser Pol ist dann nach Definition das Bild $\mathfrak{b}_B$ des Binormalenpunktes. Die Punkte $\mathfrak{X}(s_0)$, $\mathfrak{t}_B(s_0)$ und $\mathfrak{b}_B(s_0)$ spannen die rektifizierende Ebene auf. Man konstruiere den Pol dieser Ebene. Er ist dann nach Definition das Bild $\mathfrak{n}_B$ des Hauptnormalenpunktes. Damit sind die vier Eckpunkte des begleitenden Polartetraeders konstruiert (vgl. die schematische Abb. 3).

### § 3. Eine Anwendung auf die Flächentheorie.

Die Tangentenebene im Punkte einer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist definiert als Gesamtheit aller Tangentenrichtungen der Flächenkurven im Berührungspunkt. Aus Satz (14) folgt also:

Satz 16: *Das Bild der Tangentenebene ist die euklidische Tangentenebene des Bildes.*

In allen drei Geometrien haben nun die nichtgeradlinigen Asymptotenlinien die Eigenschaft, daß die Schmiegebenen der Asymptotenlinie mit den Tangentenebenen längs der Asymptotenlinie zusammenfallen. Nun sind nach Satz 15 die Bilder der Schmiegebenen die euklidischen Schmiegebenen der Bilder. Nach Satz 16 gilt dasselbe für Tangentenebenen. Daraus läßt sich folgern:

Satz 17: *Die Bilder der Asymptotenlinien sind die Asymptotenlinien der Bilder.*

Dieser Satz ist nicht selbstverständlich; denn die Bilder der Krümmungslinien und der geodätischen Linien sind im allgemeinen nicht die euklidischen Krümmungslinien und geodätischen Linien der Bildfläche.

Satz 17 spricht eine Proportionalität der euklidischen zweiten Fundamentalform und der nichteuklidischen zweiten Fundamentalform aus. Es soll nun ein anderer Beweis für Satz 17 gegeben werden, in dem gezeigt wird, daß die zweiten Fundamentalgrößen $D$, $D'$ und $D''$ der nichteuklidischen Geometrie den zweiten Fundamentalgrößen $L_{ik}$ der Bilder, im euklidischen Raum betrachtet, proportional sind.

Zur Vereinfachung der Rechnung werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$u = u^1, \quad v = u^2,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^i} = \mathfrak{X}_i, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u^i \partial u^k} = \mathfrak{X}_{ik}.$$

Aus den früheren Sätzen folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_B}{\partial u^i} - \mathfrak{x}_B = \frac{x_0}{\frac{\partial x_0}{\partial u^i}} \mathfrak{X}_i, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}_B}{\partial u^i \partial u^k} - \mathfrak{x}_B = \frac{x_0}{\frac{\partial^2 x_0}{\partial u^i \partial u^k}} \mathfrak{X}_{ik} + \frac{\frac{\partial x_0}{\partial u^i}}{\frac{\partial^2 x_0}{\partial u^i \partial u^k}} \mathfrak{X}_k + \frac{\frac{\partial x_0}{\partial u^k}}{\frac{\partial^2 x_0}{\partial u^i \partial u^k}} \mathfrak{X}_i. \tag{66}$$

Benützt man die Definition für $\mathfrak{X}_3$, so erhält man für die euklidischen zweiten Fundamentalgrößen

$$L_{ik} = \mathfrak{X}_{ik} \mathfrak{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}} |\, \mathfrak{X}_{ik} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \,|. \tag{67}$$

Setzt man

$$D = l_{11}, \quad D' = l_{12}, \quad D'' = l_{22}, \quad E = g_{11}, \quad F = g_{12}, \quad G = g_{22},$$

so ist

$$l_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{x} & \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \end{vmatrix}. \tag{68}$$

Dividiert man in (68) die ersten drei Spalten durch das $\frac{1}{x}$-fache des letzten Gliedes der zugehörigen Spalte, so erhält man die Koordinaten der Bilder

$$l_{ik} = \frac{x_0 \frac{\partial x_0}{\partial u^1} \frac{\partial x_0}{\partial u^2} \frac{\partial x_0}{\partial u^i \partial u^k}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_B & \frac{\partial \mathfrak{x}_B}{\partial u^1} & \frac{\partial \mathfrak{x}_B}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_B}{\partial u^i \partial u^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man die erste Spalte von jeder anderen Spalte, so erhält man die dreireihige Determinante

$$l_{ik} = \frac{x_0 \frac{\partial x_0}{\partial u^1} \frac{\partial x_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x_0}{\partial u^i \partial u^k}}{x^4 \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{x}_B}{\partial u^1} - \mathfrak{x}_B & \frac{\partial \mathfrak{x}_B}{\partial u^2} - \mathfrak{x}_B & \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_B}{\partial u^i \partial u^k} - \mathfrak{x}_B \end{vmatrix}.$$

Führt man nun (65) und (66) ein und vereinfacht die Determinante, indem man Vielfache der ersten und zweiten Spalte von der dritten Spalte subtrahiert und die gemeinsamen Faktoren vor die Determinante zieht, so wird

$$l_{ik} = \frac{x_0^4}{x^4 \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} |\, \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_{ik} \,|.$$

Führt man nun für $|\, \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_{ik} \,|$ Formel (67) ein, so ergibt sich der Proportionalitätsfaktor zwischen $L_{ik}$ und $l_{ik}$ zu

$$\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, l_{ik} = \frac{x_0^4}{x^4} \sqrt{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}\, L_{ik}. \tag{69}$$

Daraus läßt sich Satz 17 über die Asymptotenlinien wieder unmittelbar folgern.

Mit Hilfe von (69) kann man die GAUSSsche Krümmung $\mathfrak{K}$ im nichteuklidischen Raum durch die GAUSSsche Krümmung $K$ der Bildfläche im euklidischen Raum ausdrücken. Nach Definition ist

$$\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = \mathfrak{K}_r = \frac{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}{\varkappa^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Führt man (69) ein, so erhält man

$$\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = \mathfrak{K}_r = \frac{x_0^8}{\varkappa^8} \frac{(G_{11} G_{22} - G_{12}^2)^2}{\varkappa^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^2} \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}.$$

Wegen

$$K = \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{G_{11} G_{22} - G_{12}^2}$$

wird

$$K \frac{(G_{11} G_{22} - G_{12}^2)^2}{\varkappa^2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)^2} \frac{x_0^8}{\varkappa^8} = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = \mathfrak{K}_r, \tag{70}$$

was einen neuen Beweis für die Tatsache ergibt, daß die Torsen in allen drei Geometrien dieselben sind und die Krümmung des umgebenden Raumes haben. Denn aus $K = 0$ folgt notwendig $\mathfrak{K}_r = \mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = 0$.

Außerdem läßt sich durch Formel (70) die Frage beantworten, ob es Rotationsflächen konstanter Krümmung außer gewissen Kegeln und Kugeln gibt, deren Krümmung im euklidischen Bildraum ebenfalls konstant ist. Setzt man für die Fundamentalgrößen $G_{ik}$ und $g_{ik}$ in (70) die speziellen Werte für Rotationsflächen ein, so erhält man für die hyperbolische Geometrie den Ausdruck

$$K \frac{(1 + \psi^2 - \psi'^2)^2}{(1 + \psi^2)^2} = (1 + \mathfrak{K})(1 - \psi'^2)^2 \mathfrak{Cof}^4 J \tag{71}$$

und für die elliptische Geometrie

$$K \frac{(1 - \psi^2 - \psi'^2)^2}{(1 - \psi^2)^2} = (\mathfrak{K} - 1)(1 - \varphi'^2)^2 \cos^4 J; \tag{72}$$

dabei sind die Flächen gegeben durch die Erzeugenden

$$f = \varphi(w(v)) = \frac{\psi}{\sqrt{1 \pm \psi^2}} \frac{1}{\mathfrak{Cof} J} \text{ bzw. } \frac{\psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} \frac{1}{\cos J},$$

$$g = \int^{w(v)} \sqrt{1 - \varphi'^2}\, d\eta = \mathfrak{Tg} J \text{ bzw. } \operatorname{tg} J.$$

Die Ausdrücke (71) und (72) sind genau so wie (70) im allgemeinen keine Bewegungsinvarianten, weder für die nichteuklidischen noch für die

euklidische Geometrie. Nur Transformationen, die der euklidischen und einer nichteuklidischen Geometrie gemeinsam angehören, lassen die Ausdrücke invariant. Nur für $\mathfrak{K} = \frac{1}{\varkappa^2}$ und damit $K = 0$ bleiben die Ausdrücke invariant, dann sind sie identisch Null. Die zugehörigen Flächen sind bestimmte Rotationskegel.

Für $\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} \neq 0$ erkennt man, daß sich die Ausdrücke (71) und (72) stets nach $J$ auflösen lassen. Das heißt aber, daß sich $J$ durch $\psi$ in geschlossener Form darstellen läßt, daher kann $J$ kein elliptisches Integral sein. Daraus läßt sich weiterhin folgern, daß auch in der Darstellung der Flächen kein elliptisches Integral auftreten kann. Aus der Diskussion der Rotationsflächen mit elementar lösbarem $J$ folgt schließlich, daß nur die Ebenen und bestimmte Rotationskegel und Kugeln in zwei Geometrien zugleich konstante Krümmung haben.

## § 4. Die Übertragung des Hilbertschen Satzes.

Das wesentliche Merkmal des Hilbertschen Beweises (vgl. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Teubner, Leipzig 1930, S. 231 ff.) scheint darin zu liegen, daß es auf den Flächen negativ konstanter Krümmung durch jeden Punkt zwei reelle Asymptotenlinien gibt. Diese werden dann als Parameterlinien eingeführt.

In der euklidischen Geometrie gibt es stets dann zwei reelle Asymptotenlinien durch jeden Flächenpunkt, wenn die Gausssche Krümmung der Fläche negativ ist. In den nichteuklidischen Geometrien liegt dies etwas anders, da dort die relative Krümmung $\mathfrak{K}_r$ (das Produkt der Hauptkrümmungen) mit der Gausschen Krümmung $\mathfrak{K}$ nicht identisch ist, sondern

$$\mathfrak{K} - \frac{1}{\varkappa^2} = \mathfrak{K}_r \tag{73}$$

gilt. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien

$$D\dot{u}\dot{u} + 2D'\dot{u}\dot{v} + D''\dot{v}\dot{v} = 0$$

hat in diesen Geometrien nur dann zwei reelle Lösungen, wenn die relative Krümmung $\mathfrak{K}_r$ negativ ist. Für die elliptische Geometrie ($\varkappa^2 = 1$) folgt aus $\mathfrak{K}_r < 0$ und (73) als Bedingung für die Gausssche Krümmung: $\mathfrak{K} < 1$. In der hyperbolischen Geometrie ($\varkappa^2 = -1$) folgt aus $\mathfrak{K}_r < 0$ und (73) die Bedingung $\mathfrak{K} < 0$, $|\mathfrak{K}| < 1$. Sind diese Bedingungen für $\mathfrak{K}$ erfüllt, so gibt es zwei reelle Asymptotenlinien in jedem Punkt der Fläche. Nimmt man nun $\mathfrak{K}_r < 0$ an und betrachtet die

Bilder $\mathfrak{x}_B = \mathfrak{x}_B(u, v)$ der Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ im euklidischen Raum, so fallen nach Satz 17 die euklidischen Asymptotenlinien der Bilder mit den Bildern der Asymptotenlinien zusammen. Man kann also die Betrachtungen des HILBERTschen Beweises S. 231/233 wörtlich übertragen und die Asymptotenlinien als Parameterlinien einführen. Wählt man als Parameter auf den Asymptotenlinien die nichteuklidische Bogenlänge, so hat die erste Fundamentalform die Gestalt

$$ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2. \tag{74}$$

Dabei ist nach Definition

$$F = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}\,\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}\right) = \cos\Theta,$$

wo $\Theta$ der nichteuklidisch gemessene Winkel zwischen den Asymptotenlinien ist. Also wird aus (74)

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\Theta\,du\,dv + dv^2. \tag{75}$$

Die GAUSSsche Krümmung ist in allen drei Geometrien die innere Invariante der ersten Fundamentalform. Daher folgt für $\Theta$ dieselbe Differentialgleichung wie in der euklidischen Geometrie:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = -\mathfrak{K}\sin\Theta. \tag{76}$$

Wählt man für die elliptische Geometrie (Bedingung $\mathfrak{K} < 1$) $\mathfrak{K} = -1$, so gilt

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = \sin\Theta. \tag{77}$$

Man kann nun den Beweis von HILBERT Wort für Wort übertragen, da er nur noch Folgerungen aus der Gleichung (77) enthält. Damit ist bewiesen, daß es im elliptischen Raum, also auf der Kugel im vierdimensionalen euklidischen Raum, keine singularitätenfreie Fläche negativ konstanter GAUSSscher Krümmung gibt.

Es ist vielleicht noch von Interesse, daß man den HILBERTschen Beweis für die elliptische Geometrie auch auf Flächen positiv konstanter GAUSSscher Krümmung $\mathfrak{K}$ mit $0 < \mathfrak{K} < 1$ ausdehnen kann, da ebenfalls auf diesen Flächen in jedem Flächenpunkt zwei reelle Asymptotenlinien existieren. Man hat wieder Gleichung (76) zu betrachten. HILBERT wählt in seinem Beweis die positive $u$- und $v$-Richtung so, daß $0 < \Theta < \pi$ und $\frac{\partial\Theta}{\partial u} \geqq 0$ im Punkte $u - v = 0$ gilt. Nimmt man nun die positive $u$- und $v$-Richtung jetzt so, daß im Punkte $u = v = 0$ die Ungleichungen $\pi < \Theta < 2\pi$ und $\frac{\partial\Theta}{\partial u} \geqq 0$ gelten,

so kann man den Beweis ohne weiteres übertragen, nur die Ungleichungen erhalten andere Schranken, nämlich $\pi$ und $2\pi$. Man kann aber durch die Transformation $\Theta = \pi + \Theta'$ den Beweis auch sofort auf den HILBERTschen wörtlich zurückführen, denn aus $\pi < \Theta < 2\pi$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial u} \geqq 0$ folgen für $\Theta'$ die Ungleichungen $0 < \Theta' < \pi$ und $\frac{\partial \Theta'}{\partial u} \geqq 0$, und die Differentialgleichung (76) hat die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \Theta'}{\partial u \partial v} = \mathfrak{K} \sin \Theta'.$$

Es gilt also

Satz 18: *Im elliptischen Raum gibt es keine singularitätenfreie Fläche positiv konstanter Krümmung* $\mathfrak{K}$ *mit* $0 < \mathfrak{K} < 1$, *wenn die Krümmung des Raumes* $+1$ *ist.*

Für $\mathfrak{K} = 0$ bildet eine Ausnahme nur die CLIFFORDsche Fläche im elliptischen Raum, die als einschaliges Hyperboloid zwei Scharen von geradlinigen Asymptotenlinien enthält und singularitätenfrei ist. In diesem Fall läßt sich aus (76) nichts aussagen, da dann

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = 0$$

entsteht. Darauf läßt sich der HILBERTsche Beweis nicht anwenden.

Für die hyperbolische Geometrie mit der Bedingung $\mathfrak{K} < 0$ und $|\mathfrak{K}| > 1$ muß man $\mathfrak{K} = -2$ wählen, da $\mathfrak{K}_r = 0$ für $\mathfrak{K} = -1$ gilt, es also in jedem Punkt der Fläche nur eine reelle Asymptotenlinie gibt. Für $\mathfrak{K} = -2$ hat Gleichung (76) die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = 2 \sin \Theta,$$

und der Beweis von HILBERT läßt sich hierauf sofort ausdehnen. Man befindet sich bei dem Beweis auch stets im Innern des absoluten Gebildes, da die nichteuklidische Bogenlänge Parameter auf den Asymptotenlinien ist und es sich nur um endliche hyperbolische Entfernungen von dem realen Punkt handelt. Man kommt also zu der Folgerung, daß schon in endlicher hyperbolischer Entfernung ein singulärer Punkt der Fläche liegen muß. Für die hyperbolische Geometrie gilt also

Satz 19: *Es gibt im hyperbolischen Raum mit der Krümmung* $-1$ *keine singularitätenfreie Fläche negativ konstanter Krümmung* $\mathfrak{K}$ *mit* $|\mathfrak{K}| > 1$.

Für alle drei Geometrien läßt sich dieser Sachverhalt so aussprechen:

*Es gibt in allen drei Geometrien keine singularitätenfreie Fläche negativ konstanter relativer Krümmung* $\mathfrak{K}_r$ *(Produkt der Hauptkrümmungen) mit einer Ausnahme (GAUSS sche Krümmung* $\mathfrak{K} = 0$ *im elliptischen Raum, CLIFFORD sche Fläche).*

Für die in der Arbeit untersuchten Rotationsflächen konstanter Krümmung sind diese Aussagen selbstverständlich erfüllt.

## Literaturverzeichnis.

F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.* Berlin 1928.

J. L. Coolidge, *The Elements of Non-Euclidean Geometry.* Oxford 1909 und 1927.

L. Bieberbach, *Differentialgeometrie.* Leipzig und Berlin 1932.

W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie III.* Berlin 1929.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (7. Aufl.). Leipzig und Berlin 1930.

F. Lindemann, *Erläuternde Anmerkungen zu* H. POINCARÉ, *Wissenschaft und Hypothese* (3. Aufl.). Leipzig und Berlin 1928, S. 265 ff.

*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* 3. Band, 3. Teil, Kap. 5, Nr. VII.

## Lebenslauf.

Am 10. April 1913 wurde ich, Anneliese Hünke geb. Schneider, in Berlin geboren als Tochter des Gärtners Wilhelm Schneider und seiner Ehefrau Käthe geb. Sievert.

Nach dreijährigem Besuch der Volksschule kam ich auf eine Oberrealschule in Berlin, die ich im Jahre 1933 nach Ablegung der Reifeprüfung verließ. Im Anschluß an meine Schulzeit war ich ein halbes Jahr im Freiwilligen Arbeitsdienst tätig.

Seit dem Wintersemester 1933/34 studierte ich Mathematik und Physik an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin.

Meinen Universitätslehrern Herrn Professor Dr. E. SCHMIDT und Herrn Professor Dr. BIEBERBACH bin ich zu großem Dank verpflichtet. Herrn Professor Dr. BIEBERBACH danke ich insbesondere für die Anregung und Förderung dieser Arbeit.